

**Geometrische Aspekte
in der Theorie der
nuklearen Räume**

von
Horst Schirmeier

aus
Würzburg



Digitized by the Internet Archive
in 2026

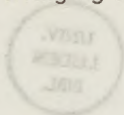
https://archive.org/details/IA41548420_0069

Geometrische Aspekte in der Theorie der nuklearen Räume

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Horst Schirmeier

aus

Würzburg

Als Dissertation genehmigt von den naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

9. 2. 1977

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter:

Professor Dr. H. Bauer

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. D. Kölzow

Inhalt

=====

Einleitung	2
Allgemeine Bezeichnungen	5
§ 1. Elementare Eigenschaften konvexer Mengen	6
1.1. Interne Punkte	7
1.2. Polytope Punkte und Eindeutigkeitsspunkte	17
1.3. Approximation auf Simplexen	21
1.4. Das Standardsimplex Δ_g	25
§ 2. Eine geometrische Kennzeichnung der Nuklearität	28
§ 3. Eigenschaften geometrisch nuklearer Räume	
3.1. Räume mit endlichdimensionalem Spektrum	40
3.2. Die Approximationseigenschaft	42
3.3. Geometrisch nukleare Operatoren	46
Literatur	64

Einleitung

=====

Seit langem spielt die Klasse der lokalkonvexen nuklearen Räume, welche Anfang der fünfziger Jahre von A. GROTHENDIECK eingeführt wurde, eine wichtige Rolle in der Funktionalanalysis. Diese Räume stehen aufgrund ihrer topologischen Struktur den endlichdimensionalen Räumen - und damit den praktischen Anwendungen - besonders nahe. Überdies besitzen auf ihnen definierte stetige Operatoren besonders angenehme Eigenschaften: sie lassen sich ohne weiteres mit dem klassischen Satz von Hahn-Banach auf umfassende Räume fortsetzen oder durch Integrale darstellen. Die wichtigsten Ergebnisse und Beispiele finden sich bereits in der bekannten Monographie [11] von GROTHENDIECK, so auch die zweite der beiden folgenden typischen Kennzeichnungen der Nuklearität eines lokalkonvexen Hausdorffraumes E:

- a) E ist genau dann nuklear, wenn auf dem Tensorprodukt $E \otimes l^1(\mathbb{N})$ die ε -Topologie mit der π -Topologie übereinstimmt (vgl. [19], 7.3.1).
- b) E ist genau dann nuklear, wenn jede gleichgradig stetige Menge ACE' in einer "nuklearen" Menge BCE' enthalten ist.

GROTHENDIECK hat auch Beispiele solcher "nuklearer" Mengen angegeben ([11], II, S. 61, cor. 4 oder S. 67, prop. 9).

Die erste Kennzeichnung diente häufig als Motivation, um "Nuklearität" auch für andere Objekte als lokalkonvexe topologische Vektorräume zu definieren, wie zum Beispiel für C^* -Algebren (vgl. [15]). G. WITTSTOCK machte bei der Untersuchung von Tensorprodukten kompakter konvexer Mengen die Beobachtung, daß für Choquet-Simplexe S ebenfalls verschieden definierte Topologien auf den Tensorprodukten der zugehörigen Räume der stetigen affinen Funktionen übereinstimmen. Für jede kompakte konvexe Menge K gilt nämlich

$$A(S) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} A(K) = A(S) \otimes_p A(K) ,$$

wobei ε die injektive Tensortopologie und p die des geordneten projektiven Tensorproduktes bezeichnet. Er konnte zeigen ($K := [-1, 1]^{\mathbb{N}}$), daß

$$A(S) \tilde{\otimes}_E l^1(N) \cong A(S) \otimes_P l^1(N) \quad (\text{isometrisch})$$

kennzeichnend dafür ist, daß S ein Simplex ist und dann mit seinem Tensor-Kalkül einen Zusammenhang mit nuklearen Räumen herstellen, indem er zeigte, daß gleichgradig stetige kompakte Simplexe "nuklear" im Sinne von b) sind [23] :

- c) E ist genau dann nuklear, wenn jede gleichgradig stetige Menge $A \subset E'$ in einem gleichgradig stetigen $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakten Simplex $S \subset E'$ enthalten ist.

Inzwischen wurde der Beweis dieses Ergebnisses mit unterschiedlichen Methoden dahingehend vereinfacht (vgl. [4], [9], [20]), daß der Tensorkalkül nicht mehr auftritt.

Ziel und Inhalt der vorgelegten Arbeit ist es, die bereits von GROTHENDIECK selbst ([11], chap. II, S. 64, "propriété de décroissance") angeregte, von PIETSCHEK begonnene, von LAZAR, RETHERFORD [17], WITTSTOCK [26] und anderen fortgesetzte tensorproduktfreie Darstellung der Theorie der nuklearen Räume auf einer c) entsprechenden geometrischen Grundlage darzulegen und weiterzuführen.

Der erste Paragraph dient der Bereitstellung der hierfür nötigen Hilfsmittel. Die dabei erhaltenen Resultate sind inzwischen größtenteils bekannt (LIMA [18], 1974), so daß vor allem unser eigener einfacher Beweisgang dargestellt ist. Es werden zwei gegensätzliche Eigenschaften von Punkten einer kompakten konvexen Menge K einander gegenübergestellt, eine algebraische, "relativ-intern", und eine topologische, "polytop". Enthält K einen einzigen Punkt, der beide Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann ist K bereits die konvexe Hülle endlich vieler Punkte. Der entscheidende Schritt zu diesem Ergebnis besteht in Lemma (1.1.9), welches eine Erweiterung der Arbeit [18] von LIMA darstellt. Die Verbindung zwischen der algebraischen und der topologischen Struktur liefert dabei der Satz von Baire.

In § 2 zeigen wir

- d) E ist genau dann nuklear, wenn jede gleichgradig stetige Menge $A \subset E'$ in einer gleichgradig stetigen $\mathcal{C}(E', E)$ -kompakten Menge $K \subset E'$ mit $0 \in K$ als polytopem Punkt enthalten ist.

Die Klasse der bisher bekannten "nuklearen" Mengen wird also erheblich vergrößert. Andererseits genügen in d) bereits sehr spezielle Mengen K , nämlich Simplexe, die entweder endlichdimensional oder affin-homöomorph zum Standardsimplex Δ_G sind.

Der dritte Paragraph untersucht Eigenschaften nuklearer Räume mit Hilfe der geometrischen Methode. Wir führen die Klasse der geometrisch nuklearen Operatoren als diejenigen Operatoren ein, die sich über eine Restriktionsabbildung

$$A(\Delta_G) \longrightarrow A(B)$$

mit $B \subset \Delta_G$ symmetrisch um $t_0 \in \Delta_G$ faktorisieren lassen und zeigen, daß dies genau die nuklearen Operatoren sind. Weiter ergibt sich, daß die auf nuklearen Räumen definierten nuklearen Operatoren zusätzliche Eigenschaften besitzen.

Den Herren Leha und Portenier vom mathematischen Institut, sowie Frau Papadopoulou danke ich für anregende Gespräche und Hinweise. Ganz besonderen Dank schulde ich meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Heinz Bauer für die Annahme als Doktorand und die trotz meiner gelegentlichen 'Nebenbeschäftigung' stete und geduldige Förderung dieser Arbeit.

Allgemeine Bezeichnungen

=====

Ist E ein lokalkonvexer reeller Hausdorff-Raum, so bezeichnet

E' den topologischen Dualraum ,
 E^* den algebraischen Dualraum .

Ist (E, F) ein duales Paar, $B \subset E$, dann bezeichnet

$B^0 := \{y \in F : |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in B\}$

die absolute Polare von B ,

$B^\bullet := \{y \in F : -1 \leq \langle x, y \rangle \text{ für alle } x \in B\}$

die Polare von B ,

$\text{con}(B)$ die konvexe Hülle von B .

Für eine konvexe Teilmenge K eines topologischen Vektorraumes bezeichnet $\partial_e K$ die Menge der geometrischen Extrempunkte von K und $A(K)$ den Vektorraum der stetigen reellwertigen affinen Funktionen auf K , der mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz versehen ist. Enthält K den Nullpunkt, dann bezeichnet $A_0(K)$ den Unterraum der im Nullpunkt verschwindenden Funktionen.

§ 1. Elementare Eigenschaften konvexer Mengen

In diesem Paragraphen werden einige später benötigte Eigenschaften konvexer Mengen bewiesen, die sich aus der Existenz gewisser Klassen von Punkten in diesen Mengen ergeben. Dabei betrachten wir interne Punkte, Eindeutigkeitspunkte und polytope Punkte.

Als Hauptergebnis erhalten wir, daß aus der Existenz eines relativ-internen polytopen Punktes in einer kompakt konvexen Menge bereits deren Endlichdimensionalität folgt. Es schließt sich eine kurze Untersuchung kompakter Simplexe an.

Dazu bezeichne im folgenden E einen reellen Vektorraum, versehen mit einer lokalkonvexen Hausdorff-Topologie $\mathfrak{T}$ und K eine konvexe abgeschlossene - jedoch nicht notwendig kompakte - Teilmenge von E .

1.1. Interne Punkte

(1.1.1) Definition. Sei A eine Teilmenge von E .

1. Ein Punkt $x \in A$ heißt interner Punkt von A , wenn die Menge $A - x$ in E absorbierend ist. Die Menge aller internen Punkte von A bezeichnen wir mit $\text{int}(A)$.
2. Der kleinste affine Teilraum $\text{aff}(A)$ von E , der A enthält, heißt die affine Hülle von A .
3. Ein Punkt $x \in A$ heißt relativ-interner Punkt von A , wenn die Menge $A - x$ im Vektorraum $\text{aff}(A) - x$ absorbierend ist. Die Menge aller relativ-internen Punkte von A bezeichnen wir mit $\text{int}_A(A)$.

- (1.1.2) Beispiele.
1. Jede endlichdimensionale konvexe Menge besitzt einen relativ-internen Punkt.
 2. Es gibt eine unendlichdimensionale konvexe Menge ohne relativ-internen Punkt. Sei nämlich $E := l^1(\mathbb{N})$ und $A := E_+$ der konvexe Kegel der nichtnegativen Folgen aus E . A ist ein spitzer konvexer Kegel, der keinen relativ-internen Punkt enthält.
 3. Jede um einen Punkt $t_0 \in A$ symmetrische Menge $A \subseteq E$ enthält diesen Punkt als relativ-internen Punkt.

Unmittelbar aus der Definition erkennen wir, daß der Begriff des internen Punktes rein algebraischer Natur ist. Die in diesem Abschnitt herzuleitenden Ergebnisse beruhen jedoch gerade auf dem Wechselspiel mit topologischen Eigenschaften konvexer Mengen. Daher weisen wir im folgenden auf einige allgemeine Zusammenhänge zwischen dem topologischen Inneren $\overset{\circ}{A}$ und dem "algebraischen Inneren" $\text{int}_A(A)$ einer Menge $A \subseteq E$ hin.

- (1.1.3) Bemerkungen. 1. Da Nullumgebungen absorbierend sind, gilt für jede Menge $A \in E$

$$\overset{\circ}{A} \subset \text{int}(A) \subset \text{int}_A(A) \subset A$$

und

$$\text{int}(A) = \text{int}_A(A) \Leftrightarrow \text{aff}(A) = E.$$

2. Ist die Topologie $\mathcal{T}$ auf E die feinste lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}(E, E^*)$, so bedeutet dies, daß die Begriffe "inner" und "intern" übereinstimmen:

$$\overset{\circ}{A} = \text{int}(A) \quad \text{für alle } A \in E.$$

In dieser Topologie beschränkte Mengen sind endlichdimensional ([20], p. 69, ex. 7(b)); aus der Normierbarkeit von $\mathcal{T}$ folgt demnach schon die Endlichdimensionalität von E .

3. Aus dieser Überlegung ergibt sich sofort das folgende Resultat von THORP ([22], cor. 2):

Jeder unendlichdimensionale normierte Vektorraum enthält eine konvexe Menge K mit

$$\text{int}(K) \setminus \overset{\circ}{K} \neq \emptyset.$$

Gilt nämlich $\overset{\circ}{K} = \text{int}(K)$ für alle konvexen Mengen $K \in E$, dann ist die Topologie die feinste lokalkonvexe.

4. Für konvexe Mengen A mit $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ gilt immer

$$\overset{\circ}{A} = \text{int}(A)$$

([5], chap. II, § 2, prop. 16). Die im Thorpschen Satz (1.1.3/3) auftretende Menge K kann also keine inneren Punkte enthalten.

- (1.1.4) Beispiele. 1. Ist A ein n -Simplex, so besteht $\text{int}_A(A)$ aus all jenen Punkten $x \in A$, deren baryzentrische Koordinaten sämtlich positiv sind, deren maximale Darstellungsmaße μ_x also

die Eigenschaft

$$\mu_x(\{y\}) > 0 \quad \text{für alle } y \in \partial_e A$$

besitzen.

2. Die Normkugel des Dualraumes E' eines Banach-Raumes E ist $\mathcal{C}(E', E)$ -kompakt und enthält den Nullpunkt als internen Punkt.

Die bisher angeführten Beispiele sind in dem Sinne typisch, daß in unendlichdimensionalen Räumen symmetrische Mengen viele, "unsymmetrische" Mengen dagegen sehr wenige relativ-interne Punkte enthalten. Wir werden nämlich im folgenden - in (1.2.8) - zeigen, daß ein Simplex, welches einen relativ-internen Punkt besitzt, notwendig endlichdimensional sein muß. Die in (1.1.4/1) angegebene Eigenschaft ist auch für unendlichdimensionale Simplexe einfach nachzuweisen.

(1.1.5) Lemma. Ist K ein kompaktes Simplex mit relativ-internem Punkt x , so gilt

$$\mu_x(\{y\}) > 0 \quad \text{für alle } y \in \partial_e K,$$

wobei μ_x das maximale Wahrscheinlichkeitsmaß auf K mit Schwerpunkt x bezeichnet.

Beweis. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $[x, x + \varepsilon \cdot (x-y)] \subset K$, also ein kleinstes $n(y) \in \mathbb{N}$ mit

$$z := x + \frac{1}{n(y)} \cdot (x-y) \in K$$

Da K ein Simplex ist, ist der Übergang $t \mapsto \mu_t$ zu den maximalen Wahrscheinlichkeitsmaßen affin; aus

$$x = \frac{1}{n(y) + 1} \cdot y + \left(1 - \frac{1}{n(y) + 1}\right) \cdot z$$

folgt dann mit Hilfe der maßtheoretischen Kennzeichnung der Extrempunkte (vgl. [2], p. 15).

$$\mu_x = \frac{1}{n(y) + 1} \cdot \varepsilon_y + \frac{n(y)}{n(y) + 1} \cdot \mu_z.$$

Nunmehr ergibt sich mit

$$\mu_x(\{y\}) = \frac{1}{n(y) + 1} + \frac{n(y)}{n(y) + 1} \cdot \mu_z(\{y\}) \geq \frac{1}{n(y) + 1} > 0$$

die Behauptung.

Ein Simplex mit relativ-internem Punkt kann also höchstens abzählbar viele Extrempunkte besitzen. Aus dem Beweis von (1.1.5) erkennen wir zweierlei: Erstens genügt es für die Endlichdimensionalität von K , zu zeigen, daß die Abbildung

$$n : \partial_e K \longrightarrow N$$

nach oben beschränkt ist. Zweitens kann in (1.1.5) die Voraussetzung " $x \in K$ ist relativ-intern" durch " $\partial_e K \subset \text{face}(x)$ " ersetzt werden. Die dafür nötigen Begriffe führen wir jetzt ein.

(1.1.6) Definition. Eine Teilmenge F von K heißt eine Seite von K , wenn gilt :

- a) F ist konvex,
- b) für jede Konvexkombination

$$x = \lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2 \quad (\lambda \in]0,1[)$$

ist die Implikation

$$x \in F \Rightarrow x_1 \in F \text{ und } x_2 \in F$$

richtig.

Die kleinste einen Punkt $x \in K$ enthaltende Seite von K bezeichnen wir mit

$$\text{face}(x).$$

(1.1.7) Bemerkungen. 1. Aus der Definition ergibt sich, daß $\emptyset$ Seite jeder konvexen Menge K ist.

2. Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Seiten von K ist eine Seite von K ; da K selbst eine Seite von K ist, ist damit für jedes $x \in K$ die Seite $\text{face}(x)$ als Durchschnitt aller x enthaltenden Seiten wohldefiniert.

3. Eine weitere Beschreibung von $\text{face}(x)$ ist durch

$$\text{face}(x) = \{ y \in K : \exists z \in K, \exists \lambda \in]0,1[: x = \lambda \cdot y + (1-\lambda) \cdot z \}$$

gegeben.

4. Unmittelbar aus der Definition von $\text{face}(x)$ folgt, daß für alle $x \in K$ gilt

$$a) \quad x \in \partial_e K \quad \Leftrightarrow \quad \text{face}(x) = \{x\} \quad ;$$

$$b) \quad x \in \text{int}_K(K) \quad \Leftrightarrow \quad \text{face}(x) = K \quad .$$

Auch im Falle $\text{face}(x) \neq K$ ist x ein relativ-interner Punkt von $\text{face}(x)$.

5. Die Vereinigung einer (bezüglich Inklusion) aufsteigend filtrierenden Familie von Seiten von K ist eine Seite von K .

Wir beschreiben jetzt die von einem Punkt $x \in K$ aufgespannte Seite $\text{face}(x)$ als Vereinigung einer aufsteigenden Folge von speziellen abgeschlossenen konvexen Mengen und halten uns dabei an die im Buch [2] von ALFSEN, p121 ff. gegebene Darstellung. Für einen Punkt $y \in K$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$y \in \text{face}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ mit}$$

$$x + \varepsilon \cdot (x - y) \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } \alpha > 1 \quad (\alpha := \frac{1}{\varepsilon} + 1)$$

mit

$$y \in (\alpha \cdot x - (\alpha - 1) \cdot K) \cap K$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\alpha > 1} (\alpha \cdot x - (\alpha - 1) \cdot K) \cap K$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\alpha \geq 1} (\alpha \cdot x - (\alpha - 1) \cdot K) \cap K$$

Mit der Bezeichnung

$$D_\alpha(x) := (\alpha \cdot x - (\alpha - 1) \cdot K) \cap K$$

erhalten wir also

$$\text{face}(x) = \bigcup_{\alpha \geq 1} D_\alpha(x)$$

und - da für zwei reelle Zahlen α, β die Implikation

$$1 \leq \alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad D_\alpha(x) \subset D_\beta(x)$$

richtig ist - sogar

$$(1.1.8) \quad \text{face}(x) = \bigcup_{\substack{n=1 \\ n \in \mathbb{N}}}^{\infty} D_n(x) \quad .$$

Es ist dabei z.B.

$$D_1(x) = \{x\} ,$$

$D_2(x) \dots$ die größte in K enthaltene und um x symmetrische Menge ,

$$D_n(x) = \left\{ y \in K : x + \frac{1}{n-1} \cdot (x-y) \in K \right\} .$$

Wir können daher $D_n(x)$ als die $(n-1)$ -te symmetrische Hülle von x in K bezeichnen. Ist K abgeschlossen bzw. kompakt, so auch jedes $D_n(x)$ als Durchschnitt von K mit einer abgeschlossenen bzw. kompakten Menge. Gilt in (1.1.8)

$$\text{face}(x) = \bigcup_{n=1}^N D_n(x) \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N} ,$$

dann ist auch $\text{face}(x)$ abgeschlossen bzw. kompakt. Eine Umkehrung dieses Tatbestandes ergibt sich aus dem folgenden wichtigen Lemma.

(1.1.9) Lemma. Für jeden Punkt x einer kompakten konvexen Menge K sind äquivalent :

1. $\text{face}(x)$ ist Bairescher Raum ;
2. $\text{face}(x)$ ist abgeschlossen ;
3. für ein $N \in \mathbb{N}$ ist $\text{face}(x) = D_N(x)$.

Dabei bleiben die Implikationen

$$1. \Rightarrow 3. \Rightarrow 2.$$

richtig, wenn K nur abgeschlossen, beschränkt und konvex ist.

Beweis. Es ist nur noch $1. \Rightarrow 3.$ nachzuweisen.

Nach (1.1.8) ist $\text{face}(x)$ die Vereinigung der abgeschlossenen Mengen $D_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Aus 1. folgt daher die Existenz eines Punktes $x_0 \in K$ und eines $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ mit

$$x_0 \in \overbrace{D_m(x)}^0$$

in der Relativtopologie auf K . Wegen Translationsinvarianz sei o.B.d.A. $x_0 = 0$. Es gibt demnach eine konvexe Nullumgebung U in E mit

$$U \cap K \subset D_m(x)$$

und - wegen der Beschränktheit von K - ein $\alpha \geq 1$ mit

$$K \subset \alpha \cdot U .$$

Hieraus folgt

$$K \subset \alpha \cdot U \cap \alpha \cdot K = \alpha \cdot (U \cap K) \subset \alpha \cdot D_m(x) ,$$

also

$$\frac{1}{\alpha} \cdot K \subset D_m(x) \quad (*) .$$

Wir zeigen nun $K \subset D_{\alpha \cdot m}(x)$. Sei dazu $k \in K$ beliebig.
Wegen $(*)$ ist

$$z := \frac{1}{\alpha} \cdot k \in D_m(x) ,$$

also

$$z' := x + \frac{1}{m-1} \cdot (x - z) = \frac{m}{m-1} \cdot x - \frac{1}{m-1} \cdot z \in K .$$

Wegen $\alpha \geq 1$ und $m > 1$ ist

$$\gamma := \frac{\alpha \cdot (m-1)}{\alpha \cdot m - 1} \in]0, 1] ;$$

die Konvexität von K zieht nach sich, daß mit z' auch

$$k' := \gamma \cdot z'$$

zu K gehört. Aus

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\alpha \cdot m}{\alpha \cdot m - 1} \cdot x - \frac{\alpha}{\alpha \cdot m - 1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot k = \\ &= x + \frac{1}{\alpha \cdot m - 1} \cdot (x - k) \in K \end{aligned}$$

folgt dann schließlich $k \in D_{\alpha \cdot m}(x)$. _____

(1.1.10) Anmerkung. Die Äquivalenz 2. $\Leftrightarrow$ 3. wurde von LIMA in [18] mit einem völlig anderen Beweis angegeben.

Da unser Beweis nur 'Bairesch' benötigt statt 'kompakt', können wir sofort die folgende Anwendung formulieren.

(1.1.11) Korollar. Sei E ein Fréchet-Raum, $K \subset E$ abgeschlossen, konvex und beschränkt. Dann sind für jeden Punkt $x \in K$ äquivalent:

1. $\text{face}(x)$ ist Bairescher Raum ;
2. $\text{face}(x)$ ist abgeschlossen ;
3. für ein $N \in \mathbb{N}$ ist $\text{face}(x) = D_N(x)$.

Beweis. Mit E ist auch K und jede abgeschlossene Teilmenge von K vollständig und metrisierbar, also ein Bairescher Raum. └

Eine weitere Folgerung aus (1.1.9) ist, daß die im Beweis von (1.1.5) auftretende Abbildung

$$n : \partial_e K \longrightarrow N$$

nach oben beschränkt ist.

(1.1.12) Korollar. Sei $K \subset E$ beschränkt und in der Relativtopologie ein Bairescher Raum. Ist $x \in K$ ein relativ-interner Punkt, dann gibt es eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $y \in K$ gilt

$$x + \frac{1}{n_0} \cdot (x - y) \in K.$$

Beweis. $K = \text{face}(x)$ ist eine abgeschlossene Seite, wegen (1.1.9) gibt es also ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit

$$K = D_N(x).$$

Dies bedeutet aber, daß für alle $y \in K$ gilt

$$x + \frac{1}{N-1} \cdot (x - y) \in K;$$

somit leistet $n_0 := N - 1$ das Verlangte. └

Wir haben in Lemma (1.1.5) bereits gesehen, daß für ein maximales Wahrscheinlichkeitsmaß mit Schwerpunkt $x \in \text{int}_K(K)$ auf einem Simplex K gilt

$$\text{Tr}(\mu_x) = \overline{\partial_e K}.$$

Im allgemeinen ist diese Bedingung weder notwendig noch hinreichend dafür, daß x ein relativ-interner Punkt von K ist. Beispiele hierfür liefern der Mittelpunkt der Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, sowie das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$.

Trotzdem ist es möglich, relativ-interne Punkte durch Eigenschaften von Maßen zu kennzeichnen.

(1.1.13) Bezeichnung. Die Menge aller maximalen Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer kompakten konvexen Menge K mit Schwerpunkt x bezeichnen wir im folgenden mit $Z_x(K)$.

(1.1.14) Satz (Maßth. Kennzeichnung relativ-interner Punkte).

Ist K eine kompakte konvexe Menge, dann sind für jeden Punkt $x \in K$ äquivalent:

1. $x \in \text{int}_K(K)$;
2. es gibt ein $a_x \in \mathbb{R}$, $a_x > 0$ derart, daß zu jedem $y \in \partial_e K$ ein $\mu_{x,y} \in Z_x(K)$ existiert mit

$$\mu_{x,y}(\{y\}) \geq a_x.$$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Aus (1.1.12) folgt die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$z := x + \frac{1}{n_0} \cdot (x - y) \in K \quad \text{für alle } y \in \partial_e K,$$

mit $\lambda := \frac{1}{n_0 + 1}$ gilt also $x = \lambda \cdot y + (1 - \lambda) \cdot z$.

Sei nun μ_z ein beliebiges Element von $Z_z(K)$. Da die Menge aller maximalen Wahrscheinlichkeitsmaße auf K konvex ist, ist durch

$$\mu_{x,y} := \lambda \cdot \varepsilon_y + (1 - \lambda) \cdot \mu_z$$

ein Element von $Z_x(K)$ gegeben, für welches gilt

$$\mu_{x,y}(\{y\}) = \lambda + (1 - \lambda) \cdot \mu_z(\{y\}) \geq \lambda = \frac{1}{n_0 + 1},$$

so daß $a_x := \lambda$ das Verlangte leistet:

2. $\Rightarrow$ 1. Zu zeigen ist $K \subset \text{face}(x)$. Sei dazu zunächst $y \in \partial_e K$ vorgegeben, $\mu_{x,y} \in Z_x(K)$ gemäß Voraussetzung gewählt und N eine natürliche Zahl mit

$$\lambda_y := \mu_{x,y}(\{y\}) \geq a_x > \frac{1}{N}.$$

Setzen wir

$$\nu := 1 \left(\{y\} \cdot \frac{\mu_{x,y}}{1 - \lambda_y} \right),$$

dann ist ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf K und

$$\mu^* := \lambda_y \cdot \varepsilon_y + (1 - \lambda_y) \cdot \nu$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Schwerpunkt x ; ist $z \in K$ der Schwerpunkt von ν , dann besitzt also x eine Zerlegung

$$x = \lambda_y \cdot y + (1 - \lambda_y) \cdot z.$$

Wegen $\frac{1}{N} < \lambda_y$ gilt damit $y \in D_N(x)$, so daß wir insgesamt

$$\partial_e K \subset D_N(x) \subset \text{face}(x)$$

gezeigt haben. Nach Bildung der abgeschlossen konvexen Hülle von $\partial_e K$ erhalten wir mit dem Satz von Krein-Milman die Behauptung. □

(1.1.15) Bemerkung. Mit obigem Satz kann die Behauptung von Lemma (1.1.5) auch ohne die Voraussetzung "Simplex" bewiesen werden. Die damit angegebene Entsprechung zwischen algebraischen Eigenschaften von Punkten x und Eigenschaften der Mengen $Z_x(K)$ legt die folgende Verallgemeinerung des Begriffes "relativ-intern" nahe:

Ein Punkt $x \in K$ heiße quasi-intern,
wenn gilt $\text{con}(\partial_e K) \subset \text{face}(x)$.

Auf der maßtheoretischen Seite bedeutet dies, daß es zu jedem $y \in \partial_e K$ ein $\mu_{x,y} \in Z_x(K)$ gibt mit

$$\mu_{x,y}(\{y\}) > 0.$$

Der Beweis erfolgt analog zu (1.1.14).

Jeder relativ-interne Punkt ist quasi-intern. Die Umkehrung gilt nicht. Ein Beispiel hierfür ist in (1.4.5/5) angegeben.

Wir sind jetzt in der Lage, den letzten Schritt zum Beweis des in der Einleitung angekündigten Resultates zu vollziehen, benötigen zur Formulierung jedoch noch einige Begriffe, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden sollen.

1.2. Polytope Punkte und Eindeutigkeitspunkte

In diesem Abschnitt sei K als kompakt vorausgesetzt. Bekanntlich ist für jeden Punkt $x \in K$ die Menge $Z_x(K)$ nichtleer (vgl. [3], S. 57, Satz 3.3.9).

(1.2.1) Definition. Ein Punkt $x \in K$, für den die Menge $Z_x(K)$ einen relativ-internen Punkt enthält, heißt polytoper Punkt von K . Ist $Z_x(K)$ einpunktig, dann heißt x ein Eindeutigkeitspunkt von K .

(1.2.2) Bemerkungen. 1. Die Bezeichnung wurde in Anlehnung an die bereits von Phelps, Alfsen und Lima eingeführten Begriffe 'Polyeder' bzw. 'Polytop' gewählt. K ist genau dann ein verallgemeinertes α -Polytop im Sinne von LIMA ([18], p. 311), wenn jedes $x \in K$ polytoper Punkt ist.

2. Die Menge $Z_x(K)$ ist konvex, jedoch im allgemeinen in der vagen Topologie nicht abgeschlossen (vgl. [2], p. 62 ff.), wohl aber in der Normtopologie, wie eine einfache Überlegung zeigt. Beim Übergang zur feineren Topologie geht jedoch im allgemeinen die relative Kompaktheit von $Z_x(K)$ verloren.

(1.2.3) Beispiele. 1. Eindeutigkeitspunkte sind polytop. Jeder Extrempunkt von K ist Eindeutigkeitspunkt von K . Insbesondere ist für nichtleeres K die Menge der Eindeutigkeitspunkte von K stets nichtleer.

2. Ist K ein kompaktes Simplex, dann ist jeder Punkt von K ein Eindeutigkeitspunkt und umgekehrt.

3. Jeder Punkt eines zweidimensionalen Quadrates ist polytop. Insbesondere gibt es polytope Punkte, die keine Eindeutigkeitspunkte sind.

4. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ besitzt die Euklidische

Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ keinen nichtextremalen Eindeutigkeitspunkt.

5. Der Mittelpunkt der Einheitskreisscheibe ist nicht polytop.

Maximal sind nämlich alle Maße, die vom Rand, also der Kreislinie, getragen werden. Zerlegen wir ein solches Maß μ gemäß [7], 13.18.6 in seinen diffusen und atomaren Anteil

$$\mu = \mu_{\text{diff}} + \mu_{\text{at}} ,$$

dann ist der atomare Anteil μ_{at} auf einer höchstens abzählbaren Menge von Punkten der Kreislinie konzentriert. Aus der Rotationssymmetrie von $Z_0(K)$ und der Positivität der Wahrscheinlichkeitsmaße folgt dann, daß der atomare Anteil eines relativ-internen Punktes μ_1^* von $Z_0(K)$ verschwinden muß: Bezeichnet f_θ eine Drehung der Kreislinie um einen Winkel θ , so ist mit μ_1^* auch das Bildmaß $\mu_2^* := f_\theta(\mu_1^*)$ ein relativ-interner Punkt von $Z_0(K)$. Mit geeigneten $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[$, $\nu_1, \nu_2 \in Z_0(K)$ gilt also

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \lambda_1 \cdot \mu_2^* + (1 - \lambda_1) \cdot \nu_1 \geq \lambda_1 \cdot \mu_2^* = \\ &= \lambda_1 \cdot \{ \lambda_2 \cdot \mu_1^* + (1 - \lambda_2) \cdot \nu_2 \} \geq \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^* , \end{aligned}$$

so daß μ_1^* und μ_2^* gegenseitig absolut stetig sind, folglich ihre atomaren Anteile auf denselben Mengen konzentriert sein müssen; θ war jedoch beliebig.

Nun ergibt sich die Behauptung aus der Tatsache, daß $Z_0(K)$ Maße mit atomarem Anteil enthält, etwa $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \varepsilon_{-\frac{\pi}{2}} + \varepsilon_{\frac{\pi}{2}} \right\}$.

Ist ein Punkt $x \in K$ gleichzeitig Eindeutigkeitspunkt und relativ intern, dann ergeben sich daraus Konsequenzen für die ganze Menge K .

(1.2.4) Bemerkungen. 1. Ist $x \in K$ ein Eindeutigkeitspunkt, dann besteht $\text{face}(x)$ aus Eindeutigkeitspunkten.

2. Im Falle $\text{int}_K(K) \neq \emptyset$ sind äquivalent:

a) K ist ein Simplex ;

b) $\text{int}_K(K)$ enthält einen Eindeutigkeitspunkt von K .

Ein entsprechendes Resultat steht für polytope Punkte zunächst nicht zur Verfügung. Trotzdem können wir beweisen ([18]):

(1.2.5) Satz. Sei K eine kompakte konvexe Menge mit relativ-internem polytopem Punkt.

Dann ist $\partial_e K$ eine endliche Menge und K ist endlichdimensional.

Beweis. Sei $x \in \text{int}_K(K)$ polytop, μ^* relativ-intern in $Z_x(K)$ und $y \in \partial_e K$ vorgegeben.

Da x relativ-intern in K ist, gibt es wegen (1.1.14) ein $a_x > 0$, und ein $\mu_{x,y} \in Z_x(K)$ mit

$$\mu_{x,y}(\{y\}) \geq a_x.$$

$Z_x(K)$ ist konvex, norm-abgeschlossen und beschränkt, erfüllt also die Voraussetzungen von (1.1.11), so daß es ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gibt mit

$$Z_x(K) = D_N(\mu^*) \quad \text{in } Z_x(K);$$

dies bedeutet insbesondere, daß es zu obigem $\mu_{x,y}$ ein $\nu_{x,y} \in Z_x(K)$ mit

$$\mu_{x,y} = N \cdot \mu^* - (N-1) \cdot \nu_{x,y} \quad \text{gibt.}$$

Daraus folgt

$$N \cdot \mu^*(\{y\}) = \mu_{x,y}(\{y\}) + (N-1) \cdot \nu_{x,y}(\{y\}) \geq a_x,$$

also insgesamt

$$\mu^*(\{y\}) \geq \frac{a_x}{N} \quad \text{für alle } y \in \partial_e K$$

Hieraus ergibt sich die Endlichkeit von $\partial_e K$, da μ^* ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. └

Aus diesem Ergebnis erhalten wir nun eine Reihe von Korollaren. An die Stelle von (1.2.4) tritt bei polytopen Punkten:

(1.2.6) Korollar. Ist $x \in K$ ein polytopter Punkt und $\text{face}(x)$ abgeschlossen, dann besteht $\text{face}(x)$ aus polytopen Punkten.

Beweis. x ist relativ-interner Punkt von $\text{face}(x)$. Die Darstellungsmaße von x in K werden von $\text{face}(x)$ getragen. └

(1.2.7) Korollar. Ist $x \in K$ ein polytoper Punkt, dann ist $Z_x(K)$ in der vagen Topologie kompakt.

Beweis. $Z_x(K)$ ist norm-abgeschlossen und konvex. Da $Z_x(K)$ einen internen Punkt μ^* besitzt, kann (1.1.11) angewandt werden, so daß in $Z_x(K)$ gilt

$$Z_x(K) = D_N(\mu^*) \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}.$$

Bilden wir die Menge $A := D_N(\mu^*)$ bezüglich der Menge $\mathcal{M}_1^+(K)$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf K , dann gilt

$$Z_x(K) = A \cap M_x,$$

wobei die Menge M_x aller Wahrscheinlichkeitsmaße mit Schwerpunkt x vag kompakt ist ([2], p. 22).

(1.2.8) Korollar. Für ein kompaktes Simplex K sind äquivalent:

1. $\text{int}_K(K) \neq \emptyset$;
2. K ist endlichdimensional .

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Satz (1.2.5) und Beispiel (1.2.3/1) ;
2. $\Rightarrow$ 1. Beispiel (1.1.4/1) .

(1.2.9) Bemerkungen. 1. Korollar (1.2.8) widerlegt eine Behauptung von ALFSEN ([1], p. 104, Lemma) .

2. Es kann $\text{face}(x) \neq K$ sein, aber die kleinste x enthaltende abgeschlossene Seite G_x dennoch mit K übereinstimmen. KÖHN hat ([12], p. 81) ein Beispiel einer kompakten konvexen Menge K mit $\partial_e K = \overline{\partial_e K}$ angegeben, die kein Simplex ist, aber einen Eindeutigkeitsspunkt $x \in K$ mit $G_x = K$ besitzt.

1.3. Approximation auf Simplex

Um später in § 3 die Approximationseigenschaft für lokal-konvexe Hausdorffräume eines dort angegebenen Typs nachweisen zu können, benötigen wir einige Ergebnisse, die wir nachfolgend zusammenstellen.

Zuerst beweisen wir ein Approximations-Fortsetzungs-Lemma, welches für Banach-Räume bereits von LAZAR angegeben wurde ([16], Lemma 2).

(1.3.1) Lemma. Sei $K \subset E$ eine kompakte konvexe Menge und

$$\text{id}_K : K \longrightarrow K$$

gleichmäßig durch affine Abbildungen $\varphi : K \longrightarrow E$ von endlichem Rang approximierbar.

Dann ist id_K auch durch Restriktionen linearer stetiger Abbildungen $E \longrightarrow E$ von endlichem Rang gleichmäßig approximierbar.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ eine die Topologie von E erzeugende Familie von Halbnormen und $\varepsilon > 0$, $p \in \mathcal{P}$, sowie eine stetige affine Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow E$$

$$\text{mit} \quad n := \dim_{\mathbb{R}} \text{aff}(\varphi(K)) < +\infty$$

$$\text{und} \quad p(\varphi(x) - x) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in K$$

vorgegeben. Es kann zunächst o.B.d.A. angenommen werden, daß $0 \in K$ ist; andernfalls könnte φ zu einer stetigen affinen Abbildung auf der konvexen (und abgeschlossenen) Hülle von $\{0\} \cup K$ fortgesetzt werden, wobei die Eigenschaften von φ erhalten bleiben.

Ist $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis der linearen Hülle von $\varphi(K)$, so ist φ von der Form

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot x_i \quad (x \in K)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in A(K)$. Da die Restriktionen von auf ganz E stetigen affinen Funktionen in

$A(K)$ dicht liegen (vgl. [2], p. 4, cor. I.1.5),
gibt es stetige affine Funktionen

$$\varphi_i : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n)$$

mit

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad (i = 1, \dots, n)$$

für alle $x \in K$. Dabei legen wir $\alpha > 0$ durch

$$\alpha := \begin{cases} \sum_{i=1}^n p(x_i) & \text{falls } \sum_{i=1}^n p(x_i) > 0 \\ 1 & \text{falls } \sum_{i=1}^n p(x_i) = 0 \end{cases}$$

fest. Für $x \in K$ gilt dann

$$\begin{aligned} p\left(\varphi(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot x_i\right) &= \\ &= p\left(\underbrace{\varphi(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot x_i}_{= 0 \in E} + \sum_{i=1}^n [\varphi_i(x) - \psi_i(x)] \cdot x_i\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n p([\varphi_i(x) - \psi_i(x)] \cdot x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x) - \psi_i(x)| \cdot p(x_i) \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n p(x_i) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} p\left(x - \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \cdot x_i\right) &\leq \\ &\leq p\left(x - \varphi(x)\right) + p\left(\varphi(x) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot x_i\right) < 2\varepsilon . \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich durch Einsetzen von $x = 0 \in K$

$$p\left(\sum_{i=1}^n \psi_i(0) \cdot x_i\right) < 2\varepsilon ,$$

so daß die Abbildung

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^n (\psi_i(x) - \psi_i(0)) \cdot x_i \end{aligned}$$

das Verlangte leistet; für alle $x \in K$ gilt nämlich

$$p(x - T(x)) \leq 4\varepsilon$$

(1.3.2) Lemma. Ist $K \subset E$ ein Bauer-Simplex, dann kann id_E auf K gleichmäßig durch lineare stetige Abbildungen von endlichem Rang approximiert werden.

Beweis. Wegen Lemma (1.3.1) genügt es, id_K gleichmäßig durch stetige affine Funktionen $\varphi : K \longrightarrow E$ von endlichem Rang zu approximieren. Sei dazu wieder eine der die Topologie auf E definierenden Halbnormen p und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, also

$$V_{p,\varepsilon} := \{x \in E : p(x) \leq \varepsilon\}$$

eine abgeschlossene konvexe Nullumgebung. Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte

$x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ mit

$$K = \bigcup_{\nu=1}^n (x_\nu + \overset{\circ}{V}_{p,\varepsilon}) \cap K$$

und eine zugehörige untergeordnete Zerlegung der Eins, d.h. Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{C}(K)_+$ mit

$$\sum_{\nu=1}^n f_\nu = 1,$$

$$\text{Tr}(f_\nu) \subset x_\nu + \overset{\circ}{V}_{p,\varepsilon} \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Bezeichnet hier $\mu(x)$ das zu einem Punkt $x \in K$ gehörige maximale Darstellungsmaß, so sind die durch

$$\mu_\nu(x) := \begin{cases} \frac{f_\nu \cdot \mu(x)}{\mu(x)(f_\nu)} & \text{falls } \mu(x)(f_\nu) > 0 \\ \mu(x) & \text{falls } \mu(x)(f_\nu) = 0 \end{cases}$$

definierten Maße Wahrscheinlichkeitsmaße auf K . Mit

$$I := \{i \in \{1, \dots, n\} : \mu(x)(f_i) > 0\}$$

erhalten wir eine Zerlegung

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \left(\sum_{\nu=1}^n f_\nu \right) \cdot \mu(x) = \sum_{\nu=1}^n f_\nu \cdot \mu(x) = \\ &= \sum_{\nu=1}^n \mu(x)(f_\nu) \cdot \mu_\nu(x) = \sum_{\nu \in I} \mu(x)(f_\nu) \cdot \mu_\nu(x) \end{aligned}$$

mit

$$\sum_{\nu \in I} \mu(x)(f_\nu) = \mu(x) \left(\sum_{\nu=1}^n f_\nu \right) = \mu(x)(1) = 1.$$

Die Schwerpunkte

$$z_v(x) := r(\mu_v(x)) \quad (v \in I)$$

sind wegen

$$z_v(x) \in \overline{\text{con}(\text{Tr}(f_v))} \subset x_v + V_{p,\epsilon}$$

genügend 'nahe' an x_v gelegen:

$$p(z_v(x) - x_v) \leq \epsilon \quad (v \in I, x \in K).$$

Werten wir eine beliebige Funktion $a \in A(K)$ an der Stelle

$$z := \sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot z_v(x)$$

aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot a(z_v(x)) = \sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot \mu_v(x)(a) = \\ &= \mu(x)(a) = a(x), \end{aligned}$$

also $z = x$; d.h. x ist als Konvexkombination

$$x = \sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot z_v(x)$$

der $z_v(x)$ dargestellt. Nun leistet aber die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : K &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot x_v \end{aligned}$$

das Verlangte:

- i) da K ein Bauer-Simplex und f_v stetig ist, ist auch

$$x \longmapsto \mu(x) \longmapsto \mu(x)(f_v)$$

stetig und affin-linear;

- ii) φ ist von endlichem Rang;

- iii) für alle $x \in K$ gilt

$$p(x - \varphi(x)) = p\left(\sum_{v \in I} \mu(x)(f_v) \cdot [z_v(x) - x_v]\right) \leq \epsilon.$$

(1.3.3) Anmerkung. LAZAR hat ([16], theorem 3) ein analoges Resultat für metrisierbare Simplexe in Banach-Räumen erhalten. Die abweichende "Regularitätsvoraussetzung" erfordert allerdings einen völlig anderen Beweis.

1.4. Das Standard-Simplex Δ_G

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns kurz mit dem einfachsten unendlichdimensionalen Bauer-Simplex Δ_G , welches bei unseren Überlegungen in den folgenden Paragraphen eine fundamentale Rolle spielt. In der Literatur wird es häufig zur Konstruktion von Gegenbeispielen herangezogen.

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in E heißt bekanntlich topologisch unabhängig, wenn für jeden Index $i \in I$ gilt

$$x_i \notin \overline{\text{lin}}(\{x_j : j \in I, j \neq i\}).$$

Eine Familie bleibt also topologisch unabhängig, wenn zu einer beliebigen mit der Dualität (E, E') verträglichen oder einer feineren lokalkonvexen Topologie übergegangen wird. Natürlich ist eine topologisch unabhängige Familie auch linear unabhängig.

(1.4.1) Beispiel. Im normierten Raum $l^1(\mathbb{N})$ ist die Folge

$$(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\delta_{mn})_{m \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$$

von Folgen $e_n \in l^1(\mathbb{N})$ topologisch unabhängig und bezüglich der Topologie $\mathfrak{S}(l^1(\mathbb{N}), c_0(\mathbb{N}))$ eine Nullfolge. Die konvexe Menge

$$\Delta_G := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})_+ : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq 1 \right\}$$

ist als Durchschnitt der $\mathfrak{S}(l^1(\mathbb{N}), c_0(\mathbb{N}))$ -kompakten Einheitskugel von $l^1(\mathbb{N})$ mit dem wegen

$$l^1(\mathbb{N})_+ = \bigcup_{x \in c_0(\mathbb{N})_+} x^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

abgeschlossenen positiven Kegel $\mathfrak{S}(l^1(\mathbb{N}), c_0(\mathbb{N}))$ -kompakt. Aus der Separabilität von $c_0(\mathbb{N})$ folgt die Metrisierbarkeit von Δ_G .

Δ_G ist als abgeschlossen konvexe Hülle von $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Bauer-Simplex ;

dies ergibt sich aus dem folgenden Satz.

(1.4.2) Satz. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge topologisch unabhängiger Elemente in E .

Ist die abgeschlossen konvexe Hülle

$$K := \overline{\text{con}}(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})$$

kompakt, dann ist K ein metrisierbares Bauer-Simplex, welches affin homöomorph zu Δ_G ist.

Beweis. Daß K ein Simplex ist, wurde in [17], Lemma 2, gezeigt.

Sei $M := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Aus dem Satz von Milman folgt

$$\partial_e K \subset \overline{M} = M \cup \{0\} = \partial_e K,$$

wobei sich das letzte Gleichheitszeichen aus der topologischen Unabhängigkeit von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt; insbesondere ist $\partial_e K$ abgeschlossen, K also ein Bauer-Simplex.

Aus dem bereits Bewiesenen folgt, daß Δ_G aus Beispiel (1.4.1) ein metrisierbares Bauer-Simplex ist. Wegen

$$\partial_e K \simeq \overline{N} \simeq \partial_e \Delta_G \quad (\text{homöomorph})$$

mit der Alexandroff-Kompaktifizierung $\overline{N}$ von N sind die beiden Bauer-Simplexe K und Δ_G affin homöomorph; folglich ist K metrisierbar. |

(1.4.3) Korollar. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in E und

$$K := \overline{\text{con}}(\{y_n : n \in \mathbb{N}\})$$

kompakt. Dann gibt es eine affine stetige Surjektion $\Delta_G \longrightarrow K$.

Beweis. Die durch

$$\begin{aligned} \Delta_G &\longrightarrow K \\ e_n &\longmapsto y_n \end{aligned}$$

gegebene Abbildung ist wegen der topologischen Unabhängigkeit von $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wohldefiniert und wegen o.B.d.A. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \in E$ stetig; sie leistet das Verlangte. |

(1.4.4) Bemerkung. Es genügt nicht, zu verlangen, daß $\partial_e K$ abzählbar ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $T := \bar{N} \cup \bar{N}$ die topologische Summe zweier Exemplare von $\bar{N}$. Das Bauer-Simplex $\mathcal{M}_1^+(T)$ besitzt abzählbar viele Extrempunkte, ist jedoch kein affin homöomorphes Bild von Δ_G .

(1.4.5) Eigenschaften von Δ_G :

1. $\Delta_G \simeq \mathcal{M}_1^+(\bar{N})$ affin homöomorph.

2. Bezeichnet $c(N)$ den mit der sup-Norm versehenen Raum der konvergenten Folgen, dann gilt

$$A(\Delta_G) \simeq c(N) \simeq c_0(N) \oplus \mathbb{R} \simeq A_0(\Delta_G) \oplus \mathbb{R}$$

isomorph als normierte Räume.

3. Jede kompakte konvexe Teilmenge von Δ_G ist metrisierbar. Umgekehrt hat LAZAR in [16], theorem 1, gezeigt, daß jede kompakte konvexe metrisierbare Menge eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes stetiges affines Bild einer konvexen Teilmenge von Δ_G ist.

4. Eine abgeschlossene Seite von Δ_G ist entweder endlichdimensional oder affin homöomorph zu Δ_G .

5. Δ_G kann wegen (1.2.8) keine internen Punkte besitzen, enthält jedoch einen quasi-internen Punkt im Sinne von Bem. (1.1.15): Für das zu

$$x := \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \Delta_G$$

gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_x \in Z_x(\Delta_G)$ gilt

$$\mu_x(\{y\}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } y = 0 \in \partial_e K \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \text{für } y = e_n \in \partial_e K, n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

also $\mu_x(\{y\}) > 0$ für alle $y \in \partial_e K$.

§ 2. Eine geometrische Kennzeichnung der Nuklearität

In diesem Paragraphen definieren wir den Begriff der geometrischen Nuklearität eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes E anhand von geometrischen Eigenschaften seines topologischen Dualraumes E' . Es ergeben sich eine Reihe von äquivalenten Formulierungen, die in § 3 einen geometrischen Zugang zu den Eigenschaften dieser Klasse von topologischen Vektorräumen gestatten.

Wir haben in § 1 gezeigt, daß ein Punkt x einer unendlich-dimensionalen kompakten konvexen Menge K nicht gleichzeitig relativ-intern und polytop sein kann. Wir trennen also die beiden Begriffe, indem wir polytope Punkte von K betrachten, die relativ-intern bezüglich einer Teilmenge B von K sind.

(2.1) Definition. Ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum E heißt geometrisch nuklear, wenn jede gleichgradig stetige Teilmenge B des topologischen Dualraumes E' in einer gleichgradig stetigen $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakten konvexen Menge $K \subset E'$ mit $0 \in K$ als polytopem Punkt enthalten ist.

Damit kann sofort eine hinreichende Bedingung für die geometrische Nuklearität eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes E angegeben werden.

(2.2) Satz. Ist jede gleichgradig stetige Menge $B \subset E'$ in einem gleichgradig stetigen $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakten Simplex enthalten, dann ist E geometrisch nuklear.

Beweis. Beispiel (1.2.3/1).

(2.3) Korollar. Ist E ein Mackey-Raum, dann genügt für die geometrische Nuklearität von E , daß jede gleichgradig stetige Menge $B \subset E'$ in einem $\mathfrak{G}(E', E)$ -kompakten Simplex enthalten ist.

Beweis. Gegenüber (2.2) kann auf die Voraussetzung der gleichgradigen Stetigkeit des Simplex verzichtet werden, da diese hier bereits aus der schwachen Kompaktheit folgt: die Bipolare des Simplex ist absolutkonvex und $\mathfrak{G}(E', E)$ -kompakt, also gleichgradig stetig.

(2.4) Bemerkungen. 1. Die umfassende Menge K in Definition (2.1) muß kein Simplex sein. Die Klasse der beim Ergebnis von WITTSTOCK [23] auftretenden 'nuklearen' Mengen wird damit also wesentlich erweitert.

2. Wesentlich ist, daß die B umfassende Menge K innerhalb des topologischen Dualraumes E' gewählt werden kann; LAZAR zeigte in [16], daß jede metrisierbare kompakt konvexe Menge in ein Simplex eines - jedoch im allgemeinen wesentlich größeren - lokalkonvexen Hausdorffraumes eingebettet werden kann.

3. CHRISTENSEN zeigte in [6], daß in einem Fréchet-Raum jede kompakte Menge mit der algebraischen Summe zweier Simplexe überdeckt werden kann. JARCHOW gab unter Verwendung dieser Eigenschaft der Fréchet-Räume eine geometrische Kennzeichnung der sog. Schwartz-Räume unter den lokalkonvexen Hausdorff-Räumen (vgl. [13], S. 76).

Um unseren Begriff der "geometrischen Nuklearität" in Verbindung zu setzen mit dem der Nuklearität eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes, erheben wir eine Charakterisierung von PIETSCH ([19], 4.1.5) zur Definition.

(2.5) Definition. Ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum E heißt nuklear, wenn es zu jeder stetigen Halbnorm p auf E eine $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakte gleichgradig stetige Teilmenge A von E' , sowie ein Radon-Maß μ auf A gibt, so daß

$$p(x) \leq \int_A |\langle x, a \rangle| d\mu(a) \quad \text{für alle } x \in E$$

gilt.

Wir zeigen nun zunächst, daß die Klasse der geometrisch nuklearen Räume in der Klasse der nuklearen Räume enthalten ist.

(2.6) Satz. Jeder geometrisch nukleare Raum ist nuklear.

Beweis. Sei p eine stetige Halbnorm auf dem geometrisch nuklearen Raum E . Da beide Seiten der in Definition (2.5) angegebenen Ungleichung bezüglich x positiv homogen sind, genügt es, sie für alle $x \in E$ mit $p(x) = 1$ zu erfüllen; für $x \in E$ mit $p(x) = 0$ ist sie trivialerweise richtig.

Seien also $U := \{y \in E : p(y) \leq 1\}$ und $x \in E$ mit $p(x) = 1$ fest vorgegeben. Nach dem Bipolarensatz gilt

$$\sup \{ |\langle x, a \rangle| : a \in U^0 \} = 1.$$

Da p stetig ist, ist $U^0 \subset E'$ gleichgradig stetig. Wegen der geometrischen Nuklearität von E gibt es eine $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakte gleichgradig stetige Menge $K \subset E'$ mit polytopem Punkt $0 \in U^0 \subset K$.

Die Restriktion der $\mathcal{G}(E', E)$ -stetigen konvexen Abbildung

$$\begin{aligned} F_x : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto |\langle x, a \rangle| \end{aligned}$$

auf die $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakte Menge U^0 nimmt in einem geometrischen Extrempunkt $a_x \in \partial_e U^0 \subset U^0$ das Supremum 1 an. Wegen der Symmetrie von U^0 gilt also

$$|\langle x, a_x \rangle| = |\langle x, -a_x \rangle| = 1.$$

Das punktweise Infimum $\hat{F}_x$ der stetigen konkaven

Majoranten von F_X auf K ist selbst eine konkave Majorante

$$\widehat{F}_X : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

von F_X , so daß gilt

$$\begin{aligned}\widehat{F}_X(0) &= \widehat{F}_X\left(\frac{1}{2} \cdot a_X + \frac{1}{2} \cdot (-a_X)\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \widehat{F}_X(a_X) + \frac{1}{2} \cdot \widehat{F}_X(-a_X) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot F_X(a_X) + \frac{1}{2} \cdot F_X(-a_X) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ |\langle x, a_X \rangle| + |\langle x, -a_X \rangle| \right\} = 1 \quad .\end{aligned}$$

Nun gibt es ([3], S. 18, Lemma 3.1.2) ein maximales Wahrscheinlichkeitsmaß μ_X auf K mit Schwerpunkt 0 und

$$\mu_X(F_X) = \widehat{F}_X(0) \quad .$$

Da die konvexe Menge Z_0 der maximalen Wahrscheinlichkeitsmaße auf K mit Schwerpunkt 0 einen relativ-internen Punkt μ^* besitzt, also wegen (1.2.7) kompakt ist, gibt es wegen (1.1.9) ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$Z_0 = \text{face}(\mu^*) = D_N(\mu^*) \quad ;$$

folglich gibt es zu $\mu_X \in Z_0$ ein $v_X \in Z_0$ mit

$$\mu_X = N \cdot \mu^* - (N-1) \cdot v_X \quad .$$

Also kann gefolgert werden

$$\begin{aligned}p(x) = 1 &\leq \widehat{F}_X(0) = \mu_X(F_X) = N \cdot \mu^*(F_X) - (N-1) \cdot v_X(F_X) \leq \\ &\leq N \cdot \mu^*(F_X) = \int_K |\langle x, a \rangle| \cdot d(N \cdot \mu^*)(a) \quad .\end{aligned}$$

Somit leisten $A := K$ und $\mu := N \cdot \mu^*$ das Verlangte.

(2.7) Bemerkungen. 1. Ein (2.6) entsprechender Satz für Simplexe wurde zuerst für Dualräume metrisierbarer lokalkonvexer Hausdorffräume von LAZAR ([16], p. 343, cor. 6) bewiesen. Er verwendete dabei die Tatsache, daß eine unendliche Reihe, deren sämtliche Partialsummen in einem beschränkten Simplex liegen, absolut konvergiert ([16], theorem 5). Für beliebige lokalkonvexe Hausdorff-Räume und Simplexe - vgl. unseren Satz (2.2) - wurde der Satz von WITTSTOCK in [23] formuliert und bewiesen; bei diesem Beweis wird die Theorie der Tensorprodukte kompakter konvexer Mengen zugrundegelegt. Einfache Beweise wurden dann vom Autor [21], von BAUHARDT [4] und von FREMLIN [9] gegeben. Die ersten beiden Vereinfachungen benutzen maßtheoretische Eigenschaften von kompakten Simplexen, der dritte Beweis beruht auf der Rieszschen Interpolationseigenschaft von $A(K)$.

2. Der Beweis der Umkehrung von Satz (2.6), den wir im folgenden der Vollständigkeit halber kurz skizzieren wollen, geht auf WITTSTOCK [23] zurück. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen und Begriffe ein, die wir auch in § 3 benötigen werden.

Bekanntlich besteht bei lokalkonvexen Hausdorff-Räumen eine eindeutige Beziehung zwischen stetigen Halbnormen und absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen. Einer die Topologie von E erzeugenden Familie $\mathcal{P}$ von Halbnormen entspricht dabei ein Fundamentalsystem (Filterbasis) von solchen Nullumgebungen. Die durch die Inklusion auf der Filterbasis gegebene Ordnung kann durch diese Zuordnung auf $\mathcal{P}$ transportiert werden. Somit kann die Familie $\mathcal{P}$ durch

$p < q \iff$ es gibt ein $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, so daß

$$p(x) \leq K \cdot q(x) \quad \text{für alle } x \in E$$

gilt

$\iff$ die durch $q \in \mathcal{P}$ auf E erzeugte Topologie ist feiner als die durch $p \in \mathcal{P}$ erzeugte

aufsteigend filtrierend geordnet werden. Im Falle $p < q$

gibt es also einen kanonischen Epimorphismus zwischen den durch Quotientenbildung entstehenden normierten Räumen

$$E_q \longrightarrow E_p$$

(d.h. $E_p := E / p^{-1}(\{0\})$), der "Nebenklassen zusammenfaßt". Die Fortsetzung dieses Epimorphismus auf die Vervollständigungen bezeichnen wir im folgenden mit

$$\Phi_{p,q} : \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p .$$

Auf diese Weise erhalten wir ein projektives System von

$$(\hat{E}_p, \Phi_{p,q})_{p,q \in \mathcal{P}}$$

von Banach-Räumen; d.h. es gilt

$$\text{a) } \Phi_{p,r} = \Phi_{p,q} \circ \Phi_{q,r} \quad \text{für alle } p,q,r \in \mathcal{P} \\ \text{mit } p < q < r ,$$

$$\text{b) } \Phi_{p,p} = \text{id}_{\hat{E}_p} \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P} .$$

Da die Abbildungen $E \longrightarrow E_p \longrightarrow \hat{E}_p$ stetig linear sind, ist auch jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \Phi_p \swarrow & & \searrow \Phi_q \\ \hat{E}_p & \xleftarrow{\quad} & \hat{E}_q \end{array} \quad \Phi_p = \Phi_{p,q} \circ \Phi_q$$

kommutativ. Da die Topologie von E Hausdorffsch ist, existiert ein Monomorphismus

$$E \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{P}} \hat{E}_p ,$$

d.h. E ist Teilraum des projektiven Limes der Familie $(\hat{E}_p)_{p \in \mathcal{P}}$ von Banach-Räumen (vgl. [20], p. 53, II.5.4).

Wir zeigen nun, daß bei geometrisch nuklearen Räumen E das projektive System spezieller gewählt werden kann; die Räume $\hat{E}_p$ und die Spektralabbildungen besitzen dann zusätzliche Eigenschaften.

(2.8) Lemma. Ist E ein nuklearer Raum, dann gibt es eine Familie $\mathcal{P}$ von stetigen Halbnormen auf E , für welche gilt:

1. $\mathcal{P}$ erzeugt die Topologie von E ;
2. $\hat{E}_p$ ist ein Hilbert-Raum für alle $p \in \mathcal{P}$;
3. zu jedem $p \in \mathcal{P}$ gibt es ein $q \in \mathcal{P}$ mit $p < q$ derart, daß

$$\Phi_{p,q} : \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$$

eine Hilbert-Schmidt-Abbildung ist.

Beweisskizze. a. Wähle zu einer gegebenen stetigen Halbnorm p eine Menge $A \subset E'$ und ein Maß μ auf A wie in Definition (2.5). Setze

$$q(x) := \left(\int_A |\langle x, a \rangle|^2 d\mu(a) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für alle } x \in E.$$

q genügt der Parallelogrammgleichung, ist stetig und es gilt

$$p(x) \leq q(x) \quad \text{für alle } x \in E,$$

d.h. das System aller so entstehenden Halbnormen q erzeugt die Topologie von E , es kann also als $\mathcal{P}$ genommen werden.

- b. Sei nun $p \in \mathcal{P}$ vorgegeben, A eine gemäß obiger Konstruktion zugehörige gleichgradig stetige $\mathcal{S}(E', E)$ -kompakte Menge $A \subset E'$. Eine Halbnorm $q \in \mathcal{P}$ mit

$$q(x) \geq \max(p(x), \sup_{a \in A} |\langle x, a \rangle|)$$

für alle $x \in E$

ist stetig und leistet das Verlangte. Der Rest wird nun völlig analog zum zweiten Teil des Beweises von IV.10.2 in [20], p. 179 bewiesen.

Wir haben damit einen einfachen Weg aufgezeigt, wie man ausgehend von unserer Definition (2.5) in den Beweisgang von WITT-STOCK einsteigen kann.

(2.9) Definition. Sei E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum,
 F ein Banach-Raum. Eine stetige lineare Abbildung

$$T : E \longrightarrow F$$

heißt nuklear, wenn es eine gleichgradig stetige Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E' , eine beschränkte Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in F und eine summierbare Zahlenfolge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n(x) \cdot y_n$$

für alle $x \in E$ gilt.

(2.10) Bemerkungen. 1. Nukleare Abbildungen sind kompakt, also insbesondere stetig.

2. Es gibt kompakte Abbildungen, die nicht nuklear sind.

3. Sind H_1, H_2 Hilbert-Räume, so lassen sich kompakte Abbildungen

$$T : H_1 \longrightarrow H_2$$

in der Form

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x, e_n)_{H_1} \cdot f_n \quad (x \in H_1)$$

darstellen, wobei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme in H_1 bzw. H_2 sind. Dabei gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ nuklear ;}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad T \text{ Hilbert-Schmidt.}$$

4. Nukleare Abbildungen zwischen Hilbert-Räumen sind also Hilbert-Schmidt; die Umkehrung gilt nicht.

5. Die Komposition zweier Hilbert-Schmidt-Abbildungen ist nuklear.

6. In 3. ist mit T auch die Transponierte T^t nuklear bzw. Hilbert-Schmidt (bezüglich der starken Topologie).

Der entscheidende Schritt bei der Umkehrung von Satz (2.6) besteht in folgendem Lemma.

(2.11) Lemma. Ist E nuklear, so ist jede gleichgradig stetige Menge $A \subset E'$ in einem $\mathfrak{B}(E', E)$ -kompakten gleichgradig stetigen Bauer-Simplex enthalten, welches affin-homöomorph zum Standard-Simplex Δ_G oder endlichdimensional ist.

Beweis. Sei o.B.d.A. $\dim_{\mathbb{R}} \text{aff}(A)$ unendlich und $\mathfrak{P}$ die gemäß Lemma (2.8) gegebene Familie stetiger Halbnormen auf E .

Da A gleichgradig stetig ist, gibt es ein $p \in \mathfrak{P}$ mit o.B.d.A.

$$\sup_{a \in A} |\langle x, a \rangle| \leq p(x) \quad \text{für alle } x \in E$$

und wegen Lemma (2.8) und Bem. (2.10/5) ein $q \in \mathfrak{P}$, so daß

$$\phi_{p,q} : \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$$

eine nukleare Abbildung zwischen Hilbert-Räumen ist. Bezeichnen wir für jedes $p \in \mathfrak{P}$ mit

$$U_p := \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

die zugehörige absolutkonvexe Nullumgebung, so gilt

$$A \subset U_p^0 \subset \text{lin}(U_q^0) ;$$

die kanonische Injektion

$$i_{p,q} : \text{lin}(U_p^0) \longrightarrow \text{lin}(U_q^0)$$

ist wegen

$$i_{p,q} = \phi_{p,q}^t$$

und Bem. (2.10/6) nuklear, wegen (2.10/3) also von der Form

$$i_{p,q}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (x, e_n) (\hat{E}_p)', \cdot f_n \quad \text{für alle } x \in \text{lin}(U_p^0),$$

wobei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme in den Hilbert-Räumen $(\hat{E}_p)' = \text{lin}(U_p^0)$ bzw. $(\hat{E}_q)' = \text{lin}(U_q^0)$ sind und $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o.B.d.A. eine strikt positive Folge mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \leq \frac{1}{2}$$

ist. Da $i_{p,q}$ injektiv ist, ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar eine Orthonormalbasis.

Nun setzen wir

$$S := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f_n : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})_+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1 \right\} \subset \text{lin}(U_q^0) \subset E' .$$

Wählen wir zu q ein $r \in \mathcal{P}$ mit $q < r$, so daß die Einbettung $i_{q,r} : \text{lin}(U_q^0) \longrightarrow \text{lin}(U_r^0)$ nuklear, also

wegen (2.10/1) kompakt ist, dann ist

$$S = i_{q,r}(S) \subset \text{lin}(U_r^0) \subset E$$

kompakt in der Hilbertraumtopologie von $\text{lin}(U_r^0)$, folglich auch in der gröberen Topologie $\mathfrak{S}(E', E)$.

Die Abbildung $\Delta_G \longrightarrow S$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f_n$$

ist eine affine Homöomorphie.

Um die gewünschte Inklusion zu erhalten, setzen wir

$$x_0 := \sum_{n=1}^{\infty} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot f_n \in S ;$$

da $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in $\text{lin}(U_p^0)$ ist, existiert für jedes $x \in A \subset U_p^0$ eine Darstellung

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot e_n , \quad \text{also mit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \leq 1 .$$

Wegen $i_{p,q}(e_n) = \lambda_n \cdot f_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt somit

$$x + x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + 1) \cdot e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + 1) \cdot \lambda_n \cdot f_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + 1) \cdot \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \lambda_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ,$$

folglich

$$x + x_0 \in S .$$

Damit haben wir mit $A \subset S - x_0$ die Behauptung vollständig bewiesen. └──────────┘

Damit haben wir also den

(2.12) Satz. Ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum E ist genau dann nuklear, wenn er geometrisch nuklear ist.

bewiesen und dazu eine Liste weiterer äquivalenter Bedingungen erhalten.

(2.13) Korollar. Für jeden lokalkonvexen Hausdorff-Raum E sind äquivalent:

1. E ist (geometrisch) nuklear ;
2. die Topologie von E wird von einer Familie $\mathcal{P}$ von Halbnormen erzeugt, so daß durch

$$(\hat{E}_p, \Phi_{p,q})_{p,q \in \mathcal{P}}$$

ein projektives System von Hilbert-Räumen mit Hilbert-Schmidtschen Spektralabbildungen gegeben ist ;

3. wie 2., nur mit nuklearen Spektralabbildungen ;

4. zu jeder gleichgradig stetigen Menge $A \subset E'$ gibt es eine stetige Halbnorm q , für die E_q ein Prä-Hilbert-Raum ist und ein im Hilbert-Raum $(\hat{E}_q)' \cong \hat{E}_q$ kompaktes Simplex K mit $A \subset K$; dieses Simplex K ist entweder endlich-dimensional oder affin homöomorph zum Standardsimplex Δ_5 ;

5. jede gleichgradig stetige Menge $A \subset E'$ ist in einem $\mathcal{G}(E'E)$ -kompakten gleichgradig stetigen metrisierbaren Bauer-Simplex enthalten ;

6. jede gleichgradig stetige Menge $A \subset E'$ ist in einem $\mathcal{G}(E',E)$ -kompakten gleichgradig stetigen Simplex enthalten ;

7. die Vervollständigung $\hat{E}$ von E ist geometrisch nuklear .

- Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. Lemma (2.8) ;
2. $\Rightarrow$ 3. Bemerkung (2.10/5) ;
3. $\Rightarrow$ 4. Beweis von (2.11) ;
4. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 6. klar ;
6. $\Rightarrow$ 1. Satz (2.2)
6. $\Leftrightarrow$ 7. Jede stetige lineare Funktion auf E besitzt eine eindeutige Fortsetzung auf $\hat{E}$; nach GROTHENDIECK ist $\hat{E}$ kanonisch isomorph zum Raum derjenigen $f \in (E')^*$, deren Restriktionen $f|_A$ auf gleichgradig stetige Mengen $A \subset E'$ stetig bezüglich $\mathcal{G}(E', E)|_A$ sind. E' und $\hat{E}'$ können miteinander identifiziert werden, wobei die Systeme der gleichgradig stetigen Mengen zusammenfallen. Jede gleichgradig stetige $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakte Menge ist auch bezüglich der Topologie $\mathcal{G}(E', \hat{E})$ kompakt.
-

§ 3. Eigenschaften geometrisch nuklearer Räume

Wir ziehen in diesem Paragraphen einige Folgerungen aus der in § 2 eingeführten Eigenschaft der geometrischen Nuklearität. Wie zu erwarten, ergeben sich dabei vor allem bereits aus der Theorie der nuklearen Räume (vgl. [11], [19], [20]) bekannte Ergebnisse. Die Beweise dazu werden jedoch unter Zugrundelegung der geometrischen Kennzeichnung geführt.

3.1. Räume mit endlichdimensionalem Spektrum

Die einfachsten Beispiele geometrisch nuklearer Räume sind die endlichdimensionalen und ihre projektiven Limiten.

(3.1.1) Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist der Banach-Raum $\mathbb{R}^n$ geometrisch nuklear. Wählt man z.B. zur Beschreibung der Topologie des $\mathbb{R}^n$ die L^1 -Norm, so besitzt der Dualraum $(\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^n$ die duale Norm

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|;$$

die Mengen $k \cdot B$ ($k \in \mathbb{N}$, $B \subset (\mathbb{R}^n)'$ L^{∞} -Norm-Kugel) bilden ein Fundamentalsystem gleichgradig stetiger Mengen, welche kompakt und konvex sind, sowie den Nullpunkt als polytopen Punkt enthalten.

Die endlichdimensionalen sind die einzigen Banach-Räume, welche geometrisch nuklear sind, wie sich aus dem folgenden Satz ergibt, der jetzt über den Begriff der geom. Nuklearität neu bewiesen wird.

(3.1.2) Satz (DVORETZKY u. ROGERS). Ist der lokalkonvexe Hausdorffraum E geometrisch nuklear und normierbar, so ist er endlichdimensional.

Beweis. Die Einheitskugel B des Dualraumes E' von E ist gleichgradig stetig und absorbierend. Es gibt eine B enthaltende $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakte konvexe Menge K mit $0 \in K$ als Eindeigkeitspunkt, welcher - da mit B auch K absorbierend ist - sogar interner Punkt ist. Aus (1.2.4) und (1.2.8) folgt, daß E' und damit auch E selbst endlichdimensional ist.

Die nächstkomplizierte Klasse geometrisch nuklearer Räume ergibt sich durch Bildung projektiver Limiten von Systemen endlichdimensionaler Hausdorff-Räume; jeder so entstandene Raum ist nämlich Teilraum eines Raumes

$$E := \mathbb{R}^I$$

mit einer geeigneten Menge I , versehen mit der Produkttopologie. Ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen in $\mathbb{R}^I$ wird durch Mengen der Form

$$V_{i_1} \times V_{i_2} \times \dots \times V_{i_n} \times \prod_{\substack{i=i_1, \dots, i_n \\ i \in I}} \mathbb{R}$$

mit Intervallen $V_{i_v} \subset \mathbb{R}$ ($v = 1, \dots, n$) gebildet; folglich ist jede gleichgradig stetige Menge des Dualraumes E' in einer Menge der Form

$$J_{i_1} \times J_{i_2} \times \dots \times J_{i_n} \times \prod_{\substack{i=i_1, \dots, i_n \\ i \in I}} \{0\}$$

mit kompakten Intervallen $J_{i_v} \subset \mathbb{R}$ ($v = 1, \dots, n$) enthalten, also in einem endlichdimensionalen Quader. Zusammen mit Beispiel (3.1.1) ist damit gezeigt:

(3.1.3) Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^I$ aller reellwertigen Funktionen auf einer Menge I , versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, ist geometrisch nuklear.

(3.1.4) Satz. Ist E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, so ist der Raum E , versehen mit der abgeschwächten Topologie $\mathcal{B}(E, E')$ geometrisch nuklear.

Beweis. Die Topologie $\mathcal{B}(E, E')$ wird von den Halbnormen

$$p_A(x) := \sup_{a \in A} |\langle x, a \rangle| \quad A \subset E' \text{ endlich}$$

erzeugt. Es ist also jede gleichgradig stetige Teilmenge von E' in einer endlichdimensionalen enthalten.

3.2. Die Approximationseigenschaft

Vor kurzem wurde die Frage, ob jeder Banach-Raum - und damit jeder lokalkonvexe Hausdorffraum - die Approximationseigenschaft (vgl. [20], III.9.2, cor. 2, p. 110) besitzt, durch ein Gegenbeispiel von Per Enflo [8] negativ entschieden. Im folgenden geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, daß ein geometrisch nuklearer Raum - bzw. dessen Dualraum - diese Eigenschaft besitzt.

(3.2.1) Satz. Der lokalkonvexe Hausdorff-Raum E sei geometrisch nuklear, $\mathfrak{T}$ eine lokalkonvexe Topologie auf dem Vektorraum E' .

Ist jede $\mathfrak{T}$ -präkompakte Teilmenge von E' gleichgradig stetig, so besitzt $(E', \mathfrak{T})$ die Approximationseigenschaft.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus (1.3.2) und der Äquivalenz 1. $\Leftrightarrow$ 5. von (2.13). └

(3.2.2) Bemerkung. Ist in (3.2.1) E infratonneliert und $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}(E', E)$, dann besitzt $(E', \mathfrak{T})$ die Approximationseigenschaft.

Denn "infratonneliert" ist gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der stark beschränkten mit den gleichgradig stetigen Teilmengen von E' .

Für das folgende sei $A_0(K) := \{f \in A(K) : f(0) = 0\}$.

(3.2.3) Lemma. Sei $K \subset E'$ eine $\mathfrak{G}(E', E)$ -kompakte gleichgradig stetige Menge, die das Nullfunktional enthält und $E|_K$ der Raum der Restriktionen

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \langle x, a \rangle \end{aligned}$$

von Punktauswertungen auf K , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf K und

$$\begin{aligned} p_K : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{a \in K} |\langle x, a \rangle| \end{aligned}$$

die zugehörige Halbnorm auf E .

Dann besteht eine Isomorphie

$$\widehat{E}_{p_K} \simeq \widehat{E}|_K \simeq A_0(K)$$

von Banach-Räumen.

Beweis. Da K gleichgradig stetig ist, ist p_K eine stetige Halbnorm. Der normierte Raum E_{p_K} ergibt sich damit in der bekannten Weise.

Sind $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ die Äquivalenzklassen zweier Elemente $x_1, x_2 \in E$ in E_{p_K} , so gilt

$$\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}_2 \Leftrightarrow p_K(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1|_K = x_2|_K$$

und

$$\|x_1\|_{E_{p_K}} = p_K(x_1) = \sup_{a \in K} |\langle x_1, a \rangle| = \|x_1|_K\|_{E|_K},$$

womit die erste Isometrie durch Übergang zu den Vollständigungen gezeigt ist.

Nun stiften wir durch
$$i_K : E|_K \longrightarrow A_0(K)$$

$$x \mapsto (a \mapsto \langle x, a \rangle)$$

eine Abbildung, von der wir zeigen, daß sie eine Isomorphie auf einen dichten Teilraum von $A_0(K)$ ist.

i_K ist stetig: Eine Nullumgebung in $A_0(K)$ ist von der Form

$$U_\varepsilon := \left\{ f \in A_0(K) : |f(a)| < \varepsilon \text{ für alle } a \in K \right\};$$

aus

$$i_K^{-1}(U_\varepsilon) = \left\{ x \in E : |\langle x, a \rangle| < \varepsilon \text{ für alle } a \in K \right\} =$$

$$= p_K^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon[)$$

und der Stetigkeit von p_K folgt die Stetigkeit von i_K ;

i_K ist injektiv: Für beliebige $x_1, x_2 \in E$ folgt

$$i_K(x_1|_K) = i_K(x_2|_K)$$

$$\Rightarrow \langle x_1, a \rangle = \langle x_2, a \rangle \text{ für alle } a \in K$$

$$\Rightarrow x_1|_K = x_2|_K;$$

$i_K(E|_K)$ liegt dicht in $A_0(K)$: Die Restriktionen affiner Funktionen auf K liegen dicht in $A(K)$ (vgl. [2], p. 4, Cor. I.1.5); daher gibt es zu jedem $f \in A_0(K)$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein

$$f_1 \in (E', \mathcal{G}(E', E))' \simeq E$$

derart, daß für alle $a \in K$ gilt

$$| \langle f_1 - f, a \rangle | < \varepsilon .$$

Die Fortsetzung von i_K auf die Vervollständigung $\widehat{E}|_K$ leistet das Verlangte. |

(3.2.4) Satz. Jeder geometrisch nukleare lokalkonvexe Hausdorff-Raum E besitzt die Approximations-Eigenschaft.

Beweis. Der Raum besitzt ein fundamentales Umgebungssystem $\mathcal{W}$ aus absolutkonvexen Mengen derart, daß für jedes $V \in \mathcal{W}$ mit einem geeigneten Bauer-Simplex S_V

$$\widehat{E}_{p_{V^0}} \simeq A_0(S_V)$$

gilt, also $\widehat{E}_{p_{V^0}}$ die Approximationseigenschaft besitzt. Wegen [11], chap. I, p. 169, Lemme 19 oder [20], p. 109, III.9.2 sind wir fertig. |

(3.2.5) Bemerkung. Es gibt eine kompakte konvexe Menge K , so daß $A_0(K)$ - und damit $A(K)$ - nicht die Approximationseigenschaft besitzt.

Beweis. P. ENFLO [8] hat gezeigt, daß es einen lokalkonvexen Hausdorff-Raum E gibt, der nicht die Approximationseigenschaft besitzt. Ist $\mathcal{W}$ ein fundamentales Umgebungssystem dieses Raumes, so existiert ein $V \in \mathcal{W}$ derart, daß $A_0(V^0)$ nicht die Approximationseigenschaft besitzt. |

(3.2.6) Bemerkung. Die Approximationseigenschaft eines Banach-Raumes vererbt sich nicht notwendig auf seine abgeschlossenen Teilräume.

Denn: Sei K eine kompakte konvexe Menge, für die $A(K)$ die Approximationseigenschaft nicht besitzt und $T := \overline{\partial_e K}$, $S := \mathcal{M}_1^+(T)$. $A(K)$ ist abgeschlossener Teilraum von $A(S)$, wie eine einfache Überlegung mit Hilfe von [2], p. 107, Theorem II.4.5 zeigt.

(3.2.7) Bemerkung. Eine weitere Folgerung aus (3.2.3) besteht in folgendem:

Wir bezeichnen einen Banach-Raum B als Simplex-Raum, wenn es ein kompaktes Simplex S in einem geeigneten lokalkonvexen Hausdorff-Raum gibt, so daß B zu $A(S)$ als Banach-Raum isomorph ist. Dann ist

jeder geometrisch nukleare Raum E
dichter Teilraum eines projektiven
Limes von Simplexräumen.

Die Überlegungen von S. 32 - 33 und (3.2.3) ergeben zunächst, daß E ein projektiver Limes von Räumen $A_0(S)$ ist. Ein Theorem von JELLET [14] führt dann zum Ziel: Zu jedem kompakten Simplex S gibt es ein weiteres kompaktes Simplex S' , so daß

$$A_0(S) \simeq A(S')$$

gilt.

Das Beispiel des unendlichdimensionalen Banach-Raumes $C[0,1]$ zeigt, daß nicht jeder projektive Limes von Simplexräumen nuklear ist.

(3.2.8) Problem. Welche abstrakten Eigenschaften muß ein projektiver Limes von Simplexräumen besitzen, damit er nuklear ist?

3.3. Geometrisch nukleare Operatoren

In diesem Abschnitt führen wir einen der 'geometrischen' Nuklearität von Räumen adäquaten Begriff für Operatoren ein. Wir gehen dabei aus von der folgenden

(3.3.1) Beobachtung. Ist B eine abgeschlossene, um $t_0 \in \Delta_G$ symmetrische und konvexe Teilmenge von Δ_G , dann ist die Restriktionsabbildung

$$r : A(\Delta_G) \longrightarrow A(B)$$

nuklear.

Beweis. Sei $a \in A(\Delta_G)$ und $x \in B$. Das Maß $\mu_x \in Z_x(\Delta_G)$ integriert die Funktion a gemäß

$$a(x) = \mu_x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x(\{e_n\}) \cdot a(e_n) \quad .$$

Jedem Extrempunkt $e_n \in \partial_e \Delta_G = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ entspricht ein Punktauswertungsfunktional $\varepsilon_n \in A(\Delta_G)'$. Definieren wir die stetigen affinen Funktionen

$$y_n : B \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mu_x(\{e_n\}) \quad ,$$

so besitzt die Restriktionsabbildung eine Darstellung

$$r(a)(.) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(a) \cdot y_n(.) \quad \text{für alle} \\ a \in A(\Delta_G),$$

wobei die Folge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig in $A(\Delta_G)'$ ist. Für die Normen der Funktionen $y_n \in A(B)$ gilt

$$\|y_n\|_B = \sup_{x \in B} |y_n(x)| = \sup_{x \in B} |y_n(x) - y_n(t_0) + y_n(t_0)| \leq \\ \leq \sup_{x \in B} |y_n(x) - y_n(t_0)| + |y_n(t_0)| \quad .$$

Setzen wir abkürzend $z_n := y_n - y_n(t_0)$, so erhalten wir

$$\|y_n\|_B \leq \|z_n\|_B + |y_n(t_0)| = \frac{1}{2} \sup_{x \in B} \left\{ |z_n(x)| + |z_n(-x)| \right\} + \\ + |y_n(t_0)| \leq \\ \leq \widehat{|z_n|}(t_0) + |y_n(t_0)| = \\ = \int_{\Delta_G} |z_n(x)| \cdot d\mu_{t_0}(x) + |y_n(t_0)| \quad ,$$

$$\|y_n\|_B \leq \int_{\Delta_G} |y_n(x) - y_n(t_0)| \cdot d\mu_{t_0}(x) + |y_n(t_0)| \quad ,$$

also wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_x(\{e_n\}) = \mu_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_G) = 1$$

für alle $x \in \Delta_G$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_B &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_G} |y_n(x)| \cdot d\mu_{t_0}(x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Delta_G} |y_n(t_0)| \cdot d\mu_{t_0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t_0)| = \\ &= 3 \quad . \end{aligned}$$

Die durch $\alpha_n := \|y_n\|_B$ definierte Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also summierbar, die durch

$$y'_n := \frac{1}{\alpha_n} \cdot y_n$$

in $A(B)$ definierte Folge $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und es gilt

$$r(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \varepsilon_n(a) \cdot y'_n$$

(3.3.2) Definition. Sei E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, F ein Banach-Raum. Eine stetige lineare Abbildung

$$T : E \longrightarrow F$$

heißt geometrisch nuklear, wenn es eine um ein $t_0 \in \Delta_G$ symmetrische, abgeschlossene und konvexe Teilmenge B von Δ_G , sowie stetige lineare Abbildungen

$$T_1 : A(B) \longrightarrow F$$

$$T_2 : E \longrightarrow A(\Delta_G)$$

derart gibt, daß

$$T = T_1 \circ r \circ T_2$$

gilt.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ T_2 \searrow & & \nearrow T_1 \\ A(\Delta_G) & \xrightarrow{r} & A(B) \end{array}$$

(3.3.3) Bemerkungen. 1. Geometrisch nukleare Abbildungen T sind nuklear. Sie lassen sich also in der Form

$$x \longmapsto T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n(x) \cdot y_n$$

schreiben. Die in (3.3.1) auftretende geometrisch nukleare Abbildung r besitzt darüber hinaus eine Zusatzeigenschaft, welche nukleare Abbildungen im allgemeinen nicht besitzen: die abgeschlossen konvexe Hülle der in ihrer Darstellung auftretenden Folge gleichgradig stetiger linearer Funktionale ist affin-homöomorph zum Standardsimplex Δ_G .

2. Sind E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, F_1 und F_2 Banach-Räume und

$$T_1 : F_2 \longrightarrow F_1 ,$$

$$T_2 : E \longrightarrow F_2$$

stetige lineare Abbildungen, von denen eine geometrisch nuklear ist, dann ist auch

$$T_1 \circ T_2 : E \longrightarrow F_1$$

geometrisch nuklear.

Zur Untersuchung der Frage, ob jede nukleare Abbildung auch geometrisch nuklear ist, benötigen wir das folgende

(3.3.4) Lemma. Sei F ein Banach-Raum und

$$T : A(\Delta_G) \longrightarrow F$$

$$a \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot a(e_n) \cdot y_n$$

eine nukleare Abbildung mit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})_+$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{und} \quad \|y_n\| = 1, \quad \alpha_n > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann existiert eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} c(\mathbb{N}) \simeq A(\Delta_G) & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow r \quad \nearrow T_1 & \\ & A(B) & \end{array}$$

mit einer um ein $t_0 \in \Delta_G$ symmetrischen kompakten

konvexen Menge $B \subset \Delta_G$ und stetig linearem T_1 .

Beweis. In (1.4.5) wurde die isometrische Isomorphie $c(\mathbb{N}) \simeq A(\Delta_G)$ begründet. Für jede kompakte konvexe Menge $B \subset \Delta_G$ liegt der Raum der affinen Abbildungen der Form

$$x \longmapsto \langle x, a \rangle + b$$

mit $a \in c_0(\mathbb{N})$ und $b \in \mathbb{R}$ dicht in $A(B)$.

Ist nun $\alpha := (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die in der Darstellung von T auftretende Folge, dann setzen wir $t_0 := \frac{\alpha}{2}$ und

$$B := D_2(t_0) \subset \Delta_G,$$

also die größte in Δ_G enthaltende um $\frac{\alpha}{2}$ symmetrische kompakt konvexe Menge (Bezeichnungen wie in § 1).

Wegen

$$\frac{1}{2} \cdot (\alpha \pm \alpha_n \cdot e_n) \in \Delta_G \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt sogar

$$\frac{1}{2} \cdot (\alpha \pm \alpha_n \cdot e_n) \in B \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sind daher $x, y \in c_0(\mathbb{N})$ mit

$$\langle x, b \rangle = \langle y, b \rangle \quad \text{für alle } b \in B,$$

so ist insbesondere

$$\frac{1}{2} \cdot (\langle x, \alpha \rangle \pm \alpha_n \cdot x_n) = \frac{1}{2} \cdot (\langle y, \alpha \rangle \pm \alpha_n \cdot y_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also schließlich - da die Folge α keine Null enthält -

$$x_n = y_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Diese Überlegung zeigt, daß die Restriktionsabbildung

$$r : A(\Delta_G) \longrightarrow A(B)$$

injektiv ist. Folglich existiert genau eine lineare Abbildung

$$T_2 : r(A(\Delta_G)) \longrightarrow F$$

mit

$$T_2 \circ r = T.$$

Es bleibt noch die Stetigkeit von T_2 zu zeigen.

$$\begin{array}{ccc} A(\Delta_G) & \xrightarrow{T} & F \\ & \searrow r & \nearrow T_2 \\ & r(A(\Delta_G)) & \end{array}$$

Ist dies geschehen, so läßt sich - da $r(A(\Delta_G))$ in $A(B)$ dicht liegt - T_2 zu der stetigen linearen Abbildung

$$T_1 : A(B) \longrightarrow F$$

fortsetzen, welche das Gewünschte leistet.

Zum Nachweis der Stetigkeit von T_2 benötigen wir eine geometrische Vorüberlegung. Wir zeigen zunächst, daß für die Normkugel U des Banach-Raumes F gilt

$$B' := \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot (T^{-1}(U))^0 \subset B, \quad (+)$$

wobei die absolute Polare bezüglich des dualen Paares $(c(N), l^1(N))$ gebildet ist.

Per definitionem ist die Menge

$$\begin{aligned} B' &= \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \beta \in l^1(N) : |\langle x, \beta \rangle| \leq \|T(x)\| \text{ für alle } x \in c(N) \right\} = \\ &= \left\{ \beta \in l^1(N) : |\langle x, \beta \rangle - \frac{1}{2} \cdot \langle x, \alpha \rangle| \leq \frac{1}{2} \cdot \|T(x)\| \text{ für alle } x \in c(N) \right\} \end{aligned}$$

symmetrisch um $\frac{\alpha}{2}$.

Weiter ist $\Delta_G^\bullet \subset B'^\bullet$: Ist nämlich $x \in \Delta_G^\bullet \subset c_0(N)$, so gilt für jedes $\lambda \in \Delta_G$

$$\langle x, \lambda \rangle \geq -1,$$

für $\lambda \in B'$ also

$$\frac{1}{2} \cdot \langle x, \alpha \rangle - \langle x, \lambda \rangle \leq \frac{1}{2} \cdot \|T(x)\| \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot |x_n|,$$

folglich

$$\langle x, \lambda \rangle \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (x_n - |x_n|) \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (-2) = -1,$$

d.h. $x \in B'^{\bullet\bullet}$.

Aus dem Bipolarensatz für die $\bullet$ -Polaren folgt nun aber

$$B' \subset B'^{\bullet\bullet} \subset \Delta_G^{\bullet\bullet} = \overline{\text{con}}(\Delta_G \cup \{0\}) = \Delta_G.$$

Da B definitionsgemäß die größte um $\frac{\alpha}{2}$ symmetrische Teilmenge von Δ_G ist, muß B die Menge B' enthalten. Damit ist $(+)$ bewiesen.

Zum Nachweis der Stetigkeit von T_2 sei nun $x \in c(\mathbb{N})$ so gewählt, daß

$$|\langle x, b \rangle| \leq 1 \quad \text{für alle } b \in B$$

gilt. Für $B \in B'$ folgt dann aus (+)

$$|\langle x, B - \frac{\alpha}{2} \rangle| \leq |\langle x, B \rangle| + |\langle x, \frac{\alpha}{2} \rangle| \leq 2,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \in (B' - \frac{\alpha}{2})^0 &= (\frac{1}{2} \cdot (T^{-1}(U))^0)^0 = 2 \cdot (T^{-1}(U))^{00} = \\ &= 2 \cdot T^{-1}(U), \end{aligned}$$

d.h.

$$\|T_2(x|_B)\| = \|T(x)\| \leq 4.$$

Damit ist die Stetigkeit von T_2 gezeigt. _____

(3.3.5) Satz. Seien E ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, F ein Banach-Raum und $T: E \rightarrow F$ stetig linear.

Dann sind äquivalent:

1. T ist nuklear ;
2. T ist geometrisch nuklear .

Beweis. Wegen Bem. (3.4.3/1) ist nur noch 1. $\Rightarrow$ 2. zu beweisen.

Wie eine einfache Rechnung zeigt, gibt es zu jeder Folge $\alpha \in l^1(\mathbb{N})$ eine monoton fallende Nullfolge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß sogar $(\alpha_n / c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ gilt. Demnach kann in der Darstellung

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n(x) \cdot y_n \quad (x \in E)$$

mit $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$ und $\|y_n\| = 1, \alpha_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

die gleichgradig stetige Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar als Nullfolge ^{*)} bezüglich $\mathcal{S}(E', E)$ gewählt werden.

^{*)} Dies bedeutet, daß $K := \overline{\text{con}}(\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\})$ vermöge der stetigen Surjektion

$$\begin{aligned} \Delta_G &\longrightarrow K \\ \beta &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \lambda_n \end{aligned}$$

ein Quotient von Δ_G ist. Siehe dazu S. 26, (1.4.3).

Seien
$$T_1 : E \longrightarrow A(\Delta_G) \simeq c(N)$$

$$x \longmapsto (\beta \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) \cdot \beta_n)$$

und

$$T_2 : A(\Delta_G) \longrightarrow F$$

$$a \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} [a(e_n) - a(0)] \cdot \alpha_n \cdot y_n$$

gesetzt.

T_1 ist stetig, weil $\{x \in E : |\lambda_n(x)| \leq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ eine in der Menge $\{x \in E : \|T_1(x)\| \leq 1\}$ enthaltene Nullumgebung ist. Die Abbildung T_2 ist wohldefiniert und wegen

$$\|T_2(a)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a(e_n) - a(0)| \cdot \alpha_n \cdot \|y_n\| \leq 2 \cdot \|a\| \cdot \|\alpha\|$$

für alle $a \in A(\Delta_G)$

stetig.

Ferner ist das
nebenstehende
Diagramm kommu-
tativ wegen

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ T_1 \searrow & & \nearrow T_2 \\ & A(\Delta_G) & \end{array}$$

$$T_2(T_1(x)) = T_2(\beta \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) \cdot \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) \cdot \alpha_n \cdot y_n =$$

$$= T(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Schreiben wir nun noch T_2 als

$$T_2 = T_3 \circ S$$

$$\begin{array}{ccc} A(\Delta_G) & \xrightarrow{T_2} & F \\ S \searrow & & \nearrow T_3 \\ & A(\Delta_G) & \end{array}$$

mit

$$S(a) := (a - a(0)) \cdot \|\alpha\|$$

und

$$T_3(a) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle a, e_n \rangle \cdot \frac{\alpha_n}{\|\alpha\|} \cdot y_n,$$

so erfüllt T_3 die Voraussetzungen von Lemma (3.3.4), läßt sich also über ein $A(B)$ faktorisieren. Zusammenfassend erhalten wir

aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & & & F \\ T_1 \downarrow & & T_2 \nearrow & & \nearrow T_3 \\ A(\Delta_G) & & & & A(B) \\ & S \searrow & & \nearrow & \\ & & A(\Delta_G) & & \end{array}$$

die gewünschte Faktorisierung für T .

(3.3.6) Korollar. Ist E ein geometrisch nuklearer lokal-konvexer Hausdorff-Raum, F ein Banach-Raum und

$$T : E \longrightarrow F$$

stetig linear, dann gilt

1. T ist geometrisch nuklear ;
2. T besitzt eine nukleare ⁺) Darstellung

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n(x) \cdot y_n ,$$

bei der die gleichgradig stetige Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusätzlich die folgende Eigenschaft besitzt:

$\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist Extremalpunktmenge einer $\mathcal{C}(E', E)$ -kompakten konvexen Menge, welche affin homöomorph zu einer abg. Seite von $\Delta_{\mathcal{C}}$ ist und die Null enthält.

Beweis. 1. Bezeichnet $p_{T,F}$ die durch $x \mapsto \|T(x)\|$ auf E definierte stetige Halbnorm, dann läßt sich T über den Banach-Raum $\hat{E}_{p_{T,F}}$ faktorisieren. Nach (3.3.3/2) genügt es daher, die Behauptung für jede kanonische Abbildung

$$\phi_p : E \longrightarrow \hat{E}_p$$

(vgl. Seite 33) zu beweisen. Sei also eine stetige Halbnorm p vorgegeben; die Menge

$$B := \{\lambda \in E' : |\lambda(x)| \leq p(x) \text{ für alle } x \in E\}$$

ist gleichgradig stetig, abgeschlossen und absolutkonvex, also nach Voraussetzung in einer gemäß (2.13/4) gewählten $\mathcal{C}(E', E)$ -kompakten gleichgradig stetigen Menge K enthalten. Wegen $\hat{E}_p \simeq A_0(B)$ (vgl. (3.2.3)) muß nur noch die Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi_p} & A_0(B) \simeq \hat{E}_p \\ \tilde{\phi}_p \downarrow & & \uparrow pr_1 \\ A(K) & \xrightarrow{\tau} & A(B) \simeq A_0(B) \oplus \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ pr_1(f \oplus t) := f \end{array}$$

verifiziert werden, also Existenz und Stetigkeit von $\tilde{\phi}_p$.

⁺) Wegen (3.3.3/1) ist T nuklear, besitzt also eine Darstellung gemäß Definition (2.9) von Seite 35 .

Wir definieren dazu einfach als Wert von $\tilde{\Phi}_p$ an der Stelle $x \in E$ diejenige Funktion auf K , welche jeder Linearform $\Lambda \in K \subset E'$ ihren Wert im Punkte x zuordnet:

$$\tilde{\Phi}_p(x)(\Lambda) := \langle x, \Lambda \rangle \quad (x \in E, \Lambda \in K).$$

Die Stetigkeit von $\tilde{\Phi}_p$ ergibt sich wie in (3.2.3) aus der gleichgradigen Stetigkeit der Menge K . Ist nämlich U die Einheitskugel des Banach-Raumes $A(K)$, dann gilt

$$\tilde{\Phi}_p^{-1}(U) = \{x \in E : |\langle x, \Lambda \rangle| \leq 1 \text{ für alle } \Lambda \in K\} = K^0;$$

somit ist $\tilde{\Phi}_p^{-1}(U)$ eine Nullumgebung in E .

Ist T von endlichem Rang, dann ist K ein endlich-dimensionales Simplex, welches in Δ_G homöomorph eingebettet werden kann. Setzt man die Funktionen aus $A(K)$ so auf Δ_G fort, daß die Fortsetzungen auf den nicht in K gelegenen Extrempunkten von Δ_G den Wert Null annehmen, dann erhält man die stetige lineare Faktorisierung

$$A(K) \xrightarrow{\quad} A(\Delta_G) \xrightarrow{\quad r \quad} A(B),$$

d.h. T ist auch in diesem Fall geometrisch nuklear.

2. Bezeichnen wir für $\Lambda \in K$ mit μ_Λ das maximale Wahrscheinlichkeitsmaß auf K mit Schwerpunkt Λ , so gilt für alle $x \in E$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_p(x)(\Lambda) = \langle x, \Lambda \rangle &= \mu_\Lambda(\langle x, . \rangle) = \sum_{e_n \in \mathcal{E}_K} \underbrace{\mu_\Lambda(\{e_n\})}_{:= y_n(\Lambda)} \cdot \underbrace{\langle x, e_n \rangle}_{:= \lambda_n(x)}, \end{aligned}$$

wobei also die Funktionale λ_n gerade die Extrempunkte von K sind.

(3.3.7) Definition. Sei E einlokalkonvexer Hausdorff-Raum, F ein Banach-Raum. Eine lineare Abbildung

$$T : E \longrightarrow F$$

heißt r -nuklear, wenn sie die beiden Eigenschaften von Korollar (3.3.6) besitzt.

(3.3.8) Bemerkung. Die Bezeichnung 'Korollar' für (3.3.6) rührt daher, daß (3.3.6) aus bekannten 'klassischen' Ergebnissen - etwa [20], p. 100, III.7.2 - unter Beachtung der Äquivalenz (3.3.5) sofort gefolgert werden kann. Die zweite Behauptung ergibt sich dabei aus dem 'großen Umordnungssatz' für absolut konvergente Doppelreihen der elementaren reellen Analysis.

Wir wollen jedoch, wie bereits einleitend erwähnt, die "geometrische" Betrachtungsweise zugrundelegen und nur gelegentlich Querverbindungen zur üblichen Darstellung aufzeigen. Deshalb haben wir zu (3.3.6) einen eigenen Beweis angegeben.

Auch zu dem folgenden Satz kann ein entsprechendes Ergebnis mit Hilfe von [20], p. 100-101 - ebenfalls aus der Kennzeichnung (3.3.5) - gefolgert werden. Wir erhalten jedoch hier mit der geometrischen Methode mehr; unser Ergebnis gestattet die Konstruktion von Simplexen ohne den Wittstockschen Umweg über Hilbert-Räume.

(3.3.9) Satz. Für jeden lokalkonvexen Hausdorff-Raum E sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. E ist geometrisch nuklear ;
2. Jede stetige lineare Abbildung von E in einen Banach-Raum F ist r -nuklear ;
3. Für jede stetige Halbnorm p auf E ist die kanonische Abbildung $\phi_p : E \longrightarrow \hat{E}_p$ r -nuklear ;
4. Zu jeder stetigen Halbnorm p auf E gibt es eine weitere stetige Halbnorm q auf E derart, daß die kanonische Abbildung

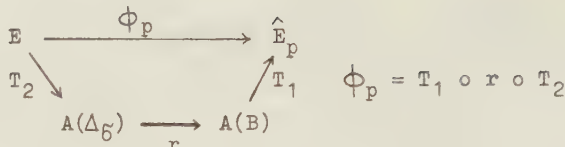
$$\phi_{p,q} : \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$$

r -nuklear ist.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. ist wegen (3.3.6) klar ;

3. $\Rightarrow$ 4. Sei eine stetige Halbnorm p auf E vorgegeben. Nach Voraussetzung 3. gibt es eine symmetrische Teilmenge $B \subset \Delta_G$ und stetige lineare Abbildungen T_1, T_2 , so daß das

Diagramm



kommutativ

ist. Die Menge $V := \{x \in E : \|T_2(x)\| \leq 1\} \cap \{x \in E : p(x) \leq 1\}$

ist eine absolutkonvexe Nullumgebung in E mit

- a) $V \subset \{x \in E : p(x) \leq 1\}$, d.h. das zu V gehörige Minowski-Funktional $q := p_V$ ist eine stetige Halbnorm mit

$$p(x) \leq q(x) \quad \text{für alle } x \in E,$$

so daß die Abbildung $\phi_{p,q} : \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$ (vgl. S. 33) wohldefiniert und stetig ist.

- b) $V \subset \{x \in E : \|T_2(x)\| \leq 1\}$

impliziert die Inklusion

$$\ker \phi_q \subset \ker T_2,$$

so daß es genau eine lineare Abbildung $T_3 : \hat{E}_q \longrightarrow A(\Delta_G)$

mit $T_2 = T_3 \circ \phi_q$ gibt. Die Stetigkeit von T_3 ergibt sich dabei aus

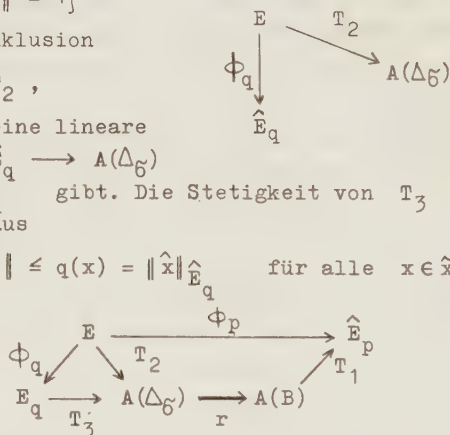
$$\|T_3(\hat{x})\| = \|T_2(x)\| \leq q(x) = \|\hat{x}\|_{\hat{E}_q} \quad \text{für alle } x \in \hat{x} \in \hat{E}_q.$$

Aus dem Diagramm

erhalten wir somit

die gewünschte

Darstellung



$$\phi_{p,q} = T_1 \circ r \circ T_3.$$

Nach Voraussetzung gilt für die in der Darstellung von ϕ_p auftretende Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - im Falle, daß ϕ_p endlichen Rang besitzt ist der Beweis trivial -, daß die von Null verschiedenen Glieder der Nullfolge $(\lambda_n - \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i)_{n \in \mathbb{N}}$ topologisch unabhängig sind; entsprechendes gilt auch für die durch

$$\mu_n := \lambda_n \circ \phi_{p,q} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge von auf $\hat{E}_q$ stetigen linearen Funktionalen.

Es ist aber

$$\phi_{p,q}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(x) \cdot y_n \quad \text{für alle } x \in \hat{E}_q,$$

wobei die Funktionale λ_n mit den entsprechenden Funktionalen auf $\hat{E}_p$ identifiziert werden.

4. $\Rightarrow$ 3. Zu vorgegebenem p gibt es ein q derart, daß

$$\phi_{p,q}: \hat{E}_q \longrightarrow \hat{E}_p$$

die behaupteten Eigenschaften besitzt. Aus

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \swarrow \phi_q & & \searrow \phi_p \\ \hat{E}_q & \xrightarrow{\phi_{p,q}} & \hat{E}_p \end{array} \quad \phi_p = \phi_{p,q} \circ \phi_q$$

folgt die geometrische Nuklearität von ϕ_p .

Jedes stetige lineare Funktional auf $\hat{E}_q$ ist als Klassenfunktion auf E ebenfalls stetig und linear.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei die gleichgradig stetige abgeschlossene absolutkonvexe Menge $B \subset E'$ vorgegeben,

$$p(x) := \sup_{\lambda \in B} |\langle x, \lambda \rangle| \quad (x \in E),$$

$$U := B^0 = \{x \in E : p(x) \leq 1\},$$

$$\phi_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n(x) \cdot y_n$$

wobei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Extrempunktmenge eines zu Δ_G affin homöomorphen Simplex K mit $0 \in K$ ist und $\|y_n\| \leq 1$, $\alpha_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$$

gilt,

$$\lambda_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \lambda_n$$

Für die Menge

$$\begin{aligned} B' &:= \frac{1}{2} \cdot (\lambda_0 + B) = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot (\lambda_0 + \lambda) : \lambda \in B \text{ und für alle } x \in U \text{ gilt } |\langle x, \lambda \rangle| \leq 1 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \cdot (\lambda_0 + \lambda) : \lambda \in B \text{ und } |\langle \cdot, \lambda \rangle| \leq p(\cdot) \right\} = \\ &= \left\{ \frac{\lambda_0}{2} + \lambda \in B : |\langle x, \lambda \rangle| \leq \frac{1}{2} \cdot p(x) \text{ für alle } x \in E \right\} = \\ &= \left\{ \mu \in B : |\langle x, \mu \rangle - \langle x, \frac{\lambda_0}{2} \rangle| \leq \frac{p(x)}{2} \text{ für alle } x \in E \right\} \end{aligned}$$

gilt $K^\bullet \subset B'^\bullet$: Ist nämlich $x \in K^\bullet$, dann gilt für jedes $\lambda \in B'$

$$\begin{aligned} |\langle x, \lambda \rangle - \langle x, \frac{\lambda_0}{2} \rangle| &\leq \frac{1}{2} \cdot p(x) \quad \text{und} \\ \langle x, \lambda_n \rangle &\geq -1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so daß aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \langle x, \lambda_0 \rangle - \langle x, \lambda \rangle &\leq \left| \frac{1}{2} \cdot \langle x, \lambda_0 \rangle - \langle x, \lambda \rangle \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot p(x) \leq \frac{1}{2} \cdot p\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) \cdot \alpha_n \cdot y_n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(x)| \cdot \alpha_n \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda \rangle &\geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (\lambda_n(x) - |\lambda_n(x)|) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot (-2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = -1, \end{aligned}$$

also $x \in B'^{\bullet}$ folgt.

Der Bipolarensatz liefert nun

$$B' \subset B'^{\bullet\bullet} \subset K^{\bullet\bullet} = K,$$

mit

$$B \subset 2 \cdot K - \lambda_0$$

also die Behauptung.

Am Ende dieses Abschnittes geben wir jetzt noch exemplarisch einige Eigenschaften an, welche aus der geometrischen Nuklearität gefolgert werden können.

(3.3.10) Korollar. Jeder geometrisch nukleare Raum E besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Jede beschränkte Menge $B \subset E$ ist prakompakt ;
2. Ist E quasivollständig, so sind die kompakten Teilmengen von E genau die abgeschlossenen und beschränkten ;
3. Ist E quasivollständig und infratonneliert, dann ist E ein Montel-Raum ;
4. Die abgeschlossenen gleichgradig stetigen Teilmengen von E' sind in der starken Topologie $\beta(E', E)$ kompakt - also auch in jeder anderen polaren Topologie des Paares (E', E) - und metrisierbar ;
5. Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in E , für die gilt

$$\sum_{i \in I} |\langle x_i, a \rangle| < +\infty \quad \text{für alle } a \in E',$$

dann gilt auch

$$\sum_{i \in I} p(x_i) < +\infty$$

für jede stetige Halbnorm p auf E .

Beweis. 1. E ist dichter Teilraum eines projektiven Limes von Simplexräumen, wobei die Topologie die initiale Topologie bezüglich einer Familie

$$\Phi_p : E \longrightarrow A(S_p)$$

geometrisch nuklearer, also kompakter Abbildungen ist. Daher ist jede Bildmenge

$$\Phi_p(B) \subset A(S_p)$$

präkompakt, also auch das Produkt

$$B \subset \prod_p \Phi_p(B) \quad .$$

2. "Quasivollständig" heißt, daß für Teilmengen $B \subset E$ aus 'abgeschlossen' und 'beschränkt' bereits 'vollständig' folgt ([21], S. 27). Abgeschlossene und beschränkte Mengen sind daher wegen 1. vollständig und präkompakt, also kompakt.

3. Wegen [21], S. 142, IV.5.3, cor. ist E quasivollständig und tonnelliert, wegen 2. also ein Montel-Raum.

4. Ist $A = \overline{A} \subset E'$ gleichgradig stetig, so folgt zunächst aus der Metrisierbarkeit des umfassenden gleichgradig stetigen Simplex Δ_G , daß A bezüglich der Topologie $\mathcal{G}(E', E)$ metrisierbar und kompakt ist.

Auf den gleichgradig stetigen Mengen von E' stimmen die Topologien $\mathcal{G}(E', E)$ und die der präkompakten Konvergenz überein, wegen 1. stimmt die letztgenannte mit $\mathcal{B}(E', E)$ überein.

5. Ist p eine stetige Halbnorm auf E , dann ist die Menge

$$U_p^0 = \{a \in E' : |\langle x, a \rangle| \leq p(x) \text{ für alle } x \in E\}$$

gleichgradig stetig in E' , also in einem $\mathcal{G}(E', E)$ -kompakten gleichgradig stetigen Choquet-Simplex K enthalten. Mit dem maximalen Darstellungsmaß^H des Nullpunktes $0 \in K$ gilt

$$p(x_i) \leq \int_K |\langle x_i, a \rangle| d\mu(a) \quad \text{für alle } i \in I,$$

wegen monotoner Konvergenz also

$$\sum_{i \in I} p(x_i) \leq \int_K \sum_{i \in I} |\langle x_i, a \rangle| \cdot d\mu(a) \quad ;$$

die zu integrierende Funktion $a \mapsto \sum_{i \in I} |\langle x_i, a \rangle|$ ist nach Voraussetzung beschränkt und als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen stetig; also ist das rechts stehende Integral endlich.

(3.3.11) Bemerkungen. 1. Die Eigenschaften (3.3.10/4) und (3.3.10/5) sind geeignet, um nachzuweisen, daß ein vorgegebener lokalkonvexer Hausdorff-Raum E nicht geometrisch nuklear ist. Die Eigenschaften sind jedoch nicht hinreichend für die geometrische Nuklearität.

2. Aus (3.3.10/3) ergibt sich sofort die Reflexivität geometrisch nuklearer Fréchet-Räume.

3. Aus (3.3.10/1) kann erneut der Satz (3.1.2) von Dvoretzky und Rogers gefolgert werden.

(3.3.12) Beispiele. 1. Im Banach-Raum $c_0(\mathbb{N})$ ist

$$\left(\left(\frac{1}{j} \delta_{ij} \right)_{j \in \mathbb{N}} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

eine Folge, für welche die Implikation (3.3.10/5) falsch ist.

2. Ist I eine überabzählbare Menge, $\mathbb{R}^{(I)}$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf I mit endlichem Träger, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, dann ist der Dualraum algebraisch isomorph zu $\mathbb{R}^I$. Die Menge $[-1, 1]^I$ ist gleichgradig stetig, jedoch in keiner der polaren Topologien metrisierbar. Folglich ist $\mathbb{R}^{(I)}$ nicht geometrisch nuklear.

Mit Satz (3.3.9) können nun analog zu [21], III.7.4 sämtliche Permanenzeigenschaften geometrisch nuklearer Räume nachgewiesen werden. In einigen Fällen kann jedoch auch direkt geometrisch argumentiert werden.

(3.3.13) Satz. Sei $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie geometrisch nuklearer Räume.

1. Ist I höchstens abzählbar, dann ist die lokalkonvexe direkte Summe

$$\bigoplus_{i \in I} E_i$$

ebenfalls geometrisch nuklear.

2. Das lokalkonvexe Produkt $\prod_{i \in I} E_i$ ist geometrisch nuklear.

Beweis. 1. Der Dualraum einer direkten Summe ist algebraisch isomorph zum Produkt der Dualräume; gleichgradig stetige Mengen $B \subset (\bigoplus_{i \in I} E_i)'$ sind also von der Form

$$\prod_{i \in I} B_i,$$

wobei B_i jeweils eine gleichgradig stetige Menge in E_i' ist. Um jedes B_i gibt es nun nach Voraussetzung eine gleichgradig stetige Menge K_i , welche affin homöomorph zu $\Delta_{\mathcal{E}}$ ist. Betten wir jedes K_i in das Produkt der Dualräume ein, identifizieren es also mit

$$K_i \times \prod_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} \{0\},$$

dann ist die Menge $K := \psi(\overline{\text{con}}(2^n \cdot \varphi(K_f(n))))$,

wobei $f: \mathbb{N} \rightarrow I$ eine Abzählung von I und

$\varphi, \psi: \prod_{i \in I} E_i' \rightarrow \prod_{i \in I} E_i'$ Translationen sind, die

folgendes bewirken: durch φ wird die Extrempunktmenge eines jeden K_i eine topologisch unabhängige Nullfolge, durch ψ wird der Nullpunkt wieder "zurechtgerückt",

wegen (1.4.3) ebenfalls zu $\Delta_{\mathcal{E}}$ affin homöomorph. Die

auf diese Weise entstandenen Mengen K bilden ein Fundamentalsystem gleichgradig stetiger Mengen.

2. In diesem Fall erfolgt die Konstruktion der Mengen K des Dualraumes analog; die Voraussetzung der Abzählbarkeit von I wird dabei nicht benötigt, da nach Definition der Produkttopologie bei der Konstruktion von gleichgradig stetigen Mengen des Dualraumes nur endliche Produkte gebildet werden müssen. └

Literatur

- [1.] ALFSEN, E.M. On the Geometry of Choquet-Simplexes,
Math. Scand. 15(1964), 97-110
- [2.] ALFSEN, E.M. Compact Convex Sets and Boundary In-
tegrals, Ergebnisse der Mathematik,
Band 57, Springer, Berlin 1971
- [3.] BAUER, Heinz Konvexität in topologischen Vektorräumen,
Vorlesungsausarbeitung, Hamburg 1963/64
- [4.] BAUHARDT, W. Eine Bemerkung über Choquetsimplexe,
Math. Nachr. 71(1976), 287-289
- [5.] BOURBAKI, N. Espaces vectoriels topologiques, chap.
I-II, 2^{ème} édition, Hermann, Paris 1966
- [6.] CHRISTENSEN, J.P.R. Compact convex sets and compact
convex Choquet Simplexes,
Inventiones Math. 19(1973), 1-4
- [7.] DIEUDONNE, J. Grundzüge der modernen Analysis 2,
VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1975
- [8.] ENFLO, P. A counterexample to the approximation
problem in Banach spaces, Acta Math.
13(1973), 309-317
- [9.] FREMLIN, D. Private Mitteilung an Herrn Wittstock,
März 1974
- [10.] FREMLIN, D. Problems, University of Essex, July 1975
- [11.] GROTHENDIECK, A. Produits tensoriels topologiques et
espaces nucléaires, Mem. AMS 16(1955),
Providence, 3rd printing 1973
- [12.] KÖHN, J. Barycenters of unique maximal measures,
Journal Funct. An. 6(1970), 76-82
- [13.] JARCHOW, H. Nuclear locally convex spaces, Lecture
Notes 13, Univ. of Maryland 1976
- [14.] JELLETT, F. On the direct sum decomposition of the
affine space of a Choquet simplex,
Quart. J. Math. Oxford (2), 18(1967), 233-237
- [15.] LANCE, Ch. On nuclear C^* -Algebras,
Journal Funct. An. 12(1973), 157-176

- [16.] LAZAR, A.J. Sections and subsets of simplexes,
Pacific Journal of Math. 33(1970), 337-345

- [17.] LAZAR, A.J. - RETHERFORD, J.R.
Nuclear spaces, Schauder bases and
Choquet simplexes,
Pacific Journal of Math. 37(1971), 409-419

- [18.] LIMA, A. Closed faces with internal points, Journal
London Math. Soc. (2), 9(1974), 305-314

- [19.] PIETSCH, A. Nuclear locally convex spaces,
Ergebnisse der Mathematik, Band 66,
Springer, Berlin 1972

- [20.] SCHAEFER, H.H. Topological Vector Spaces,
graduate texts in mathematics, Vol. 3,
3rd Printing Corrected, Springer, Berlin 1971

- [21.] SCHIRMEIER, H. Eine für die Nuklearität lokalkonvexer
Räume hinreichende Bedingung,
Math. Ann. 211(1974), 35-36

- [22.] THORP, E. Internal points of convex sets,
Journal London Math. Soc., 39(1964), 159-160

- [23.] WITTSTOCK, G. Choquetsimplexe und nukleare Räume,
Inventiones Math. 15(1972), 251-258 .



Lebenslauf

Am 1. März 1944 wurde ich als Sohn des Schlossers Herbert Schirmeier und seiner Ehefrau Margarete, geb. Kaufmann, in Würzburg geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Nürnberg und Bad Windsheim war ich zuerst Schüler des Humanistischen Gymnasiums Fürth/Bay., dann des Realgymnasiums Nürnberg, wo ich im Juli 1963 die Reifeprüfung ablegte. Im August 1961 wurden meine Eltern geschieden.

Im Wintersemester 1963/64 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Im Herbst 1966 bestand ich die für das Lehramt an Gymnasien und das Diplom in Mathematik erforderlichen Zwischenprüfungen, im November 1971 das Diplom in Mathematik.

Meine Ehefrau Ursula, geb. Pirl, heiratete ich am 27. Mai 1971 in Nürnberg.

Vom 1. November 1966 bis 31. Oktober 1973 war ich als studentische bzw. wissenschaftliche Hilfskraft am mathematischen Institut, sowie im Wintersemester 1968/69 zusätzlich am Institut für theoretische Physik in Erlangen tätig. Von Mai 1972 bis April 1974 erhielt ich ein Stipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz. Von Mai bis Oktober 1974 arbeitete ich wieder als wissenschaftliche Hilfskraft, anschließend als Verwalter einer Assistentenstelle, seit Mai 1976 als wissenschaftlicher Angestellter am mathematischen Institut.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren H. Bauer, H. Behrens, Fleischmann, O. Forster, W. Kaup, Nöbeling, Rieger, Specht und Volz. Seit 1972 bin ich Doktorand bei Prof. Bauer in Erlangen.

Lebenslauf

Am 1. März 1904 wurde ich als Sohn des verstorbenen Heinrich
Hofmann und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Laubach, in
Wittenberg geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Wittenberg
und des Realgymnasiums hier, sowie des Realgymnasiums in
Wittenberg, besuchte ich die Kaiserliche Technische Hochschule in
Dresden, wo ich am 1. März 1924 die Technische Hochschule in Dresden
mit dem Grade eines Diplom-Ingenieurs abschloß.

Im Wintersemester 1923/24 besuchte ich das Studium der
Technischen Hochschule in Dresden. Im Sommersemester 1924
wurde ich zum ersten Male in das Amt des Ingenieurs in
Dresden berufen. Im Wintersemester 1924/25 wurde ich zum
ersten Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.
Im Sommersemester 1925 wurde ich zum ersten Male in das
Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.

Meine Ehefrau, geb. 1904, wohnt mit mir in
Dresden.

Am 1. September 1924 bin ich in Dresden zum ersten Male
als Ingenieur in das Amt des Ingenieurs in Dresden
berufen worden. Im Wintersemester 1924/25 wurde ich zum
ersten Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.
Im Sommersemester 1925 wurde ich zum ersten Male in das
Amt des Ingenieurs in Dresden berufen. Im Wintersemester
1925/26 wurde ich zum ersten Male in das Amt des
Ingenieurs in Dresden berufen. Im Sommersemester 1926
wurde ich zum ersten Male in das Amt des Ingenieurs in
Dresden berufen. Im Wintersemester 1926/27 wurde ich
zum ersten Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden
berufen. Im Sommersemester 1927 wurde ich zum ersten
Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.

Meine künftige Ehefrau, geb. 1904, wohnt mit mir in
Dresden. Im Wintersemester 1924/25 wurde ich zum
ersten Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden
berufen. Im Sommersemester 1925 wurde ich zum ersten
Male in das Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.
Im Wintersemester 1925/26 wurde ich zum ersten Male
in das Amt des Ingenieurs in Dresden berufen. Im
Sommersemester 1926 wurde ich zum ersten Male in das
Amt des Ingenieurs in Dresden berufen.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nahe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990